УДК 519.216

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ПОТЕРИ ПАКЕТА И ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕПОЛНЕНИЯ БУФЕРА В МОДЕЛИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ[1]

Сидорова О.И.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 14.11.2008, после переработки 08.12.2008.

В статье рассматриваются асимптотические границы для вероятности потери пакета в модели $Y/D/1/h/d$, с некоторой специальной дисциплиной обслуживания $d \in D(h)$, предложенной Б. Цыбаковым и его соавторами. Мы рассматриваем случай, когда распределения длин активных периодов источников принадлежат множеству, состоящему из конечного числа разных распределений и указываем условия, при которых каждое из распределений вносит нетривиальный вклад в вероятность потери пакета.

In the paper we consider asymptotical bounds for the packet loss probability in the model $Y/D/1/h/d$ with some special service dicipline $d \in D(h)$ presented by Tsybakov B. and his co-authors. We are analyzing the case when distributions of the sources's active period lengthes belongs to the set consisting of finite number of different distributions and deriving conditions under which each distribution influence nontrivially on packet loss probability.

Ключевые слова: вероятность переполнения буфера, вероятность потери пакета, самоподобие, распределение с тяжелым хвостом.
Keywords: buffer overflow probability, heavy-tailed distribution, rare event's probability estimation.

Введение

В традиционных голосовых СМО входящие потоки хорошо аппроксимируются марковскими процессами или стационарными процессами типа ARMA, а интервалы времени между появлением заявок полагаются независимыми случайными величинами, имеющими распределения с легкими хвостами. В силу экспоненциального убывания корреляционной функции трафика в подобных моделях агрегированный поток при увеличении масштаба усреднения приближается по свойствам к однородному процессу с независимыми приращениями (белому шуму), то есть обладает *короткой памятью* или *быстро убывающей зависимостью*. Если такой поток поступает на вход некоторой СМО, то характеристики качества обслуживания (QoS), в частности, такие как вероятность переполнения буфера конечного

[1]Работа поддержана РФФИ, проект №06-01-00626.

размера или вероятность потери заявки, убывают экспоненциальным образом в зависимости от увеличения некоторого характерного параметра, например, размера буфера.

Эмпирические исследования [2], [4], [6] показали, что потоки трафика в современных компьютерных сетях обладают свойством *долгой памяти* или *медленно убывающей зависимости*, вследствие *степенного* убывания их корреляционных функций, а длины периодов занятости имеют *распределения с тяжелыми хвостами*, в частности, распределения типа Парето с показателем $1 < \alpha < 2$. Агрегированный процесс в этой ситуации остается случайным и статистически выглядит одинаково на разных временных шкалах, то есть является *самоподобным*.

Характеристики QoS в системах массового обслуживания с такими входящими потоками кардинально меняются по сравнению с традиционными моделями. Вследствие сложной структуры входящих потоков, как правило, трудно получить точные формулы для их расчета, хотя, в определенных случаях, можно описать их асимптотическое поведение или найти для них некоторые асимптотические границы.

В большинстве известных нам работ, посвященных анализу производительности СМО с самоподобными входящими потоками, предполагалось, что источники, порождающие трафик являются однородными, то есть имеют одинаковое распределение для длин активных периодов. Однако трафик в современных телекоммуникационных системах является интегральным, поскольку в рамках одной сети одновременно передается информация («голос» видео, текст, данные), предъявляющая разные требования к пропускной способности, скорости передачи, задержкам и прочим характеристикам QoS, и исследования потоков данных в ряде телекоммуникационных систем [4], [7] показал, что они обладают поведением, более похожим на поведение мультифрактала. Иными словами, поведение трафика на больших и маленьких временных шкалах различается. В связи с этим **актуальной является задача построения новых моделей входящих потоков**, обладающих нужными свойствами и **изучение характеристик QoS в СМО с подобными входящими потоками**. Например ожидается, что суперпозиция нескольких самоподобных процессов с различными индексами самоподобия будет обладать нужными свойствами.

К настоящему моменту существует ряд работ в которых рассматривалось несколько различных распределений длин активных периодов источников. Главный результат данных работ заключается в том, что *основное влияние на характеристики входящего потока и* QoS *в СМО оказывает распределение с самым тяжелым хвостом*. Однако естественный с практической точки зрения вопрос о том, как будут вести себя входящий поток и характеристики QoS в ситуации неоднородных источников, когда «тяжелые» заявки приходят редко, а основную нагрузку порождают относительно более «легкие» требования, остается практически неосвященным.

1. Модель Цыбакова

В последние годы возрос интерес к изучению систем типа $G/D/1/h$, $h < \infty$, поскольку в современных компьютерных системах, использующих режим асинхронной передачи данных — ATM, время обслуживания является детерминированным.

В частности, асимптотические границы для вероятности переполнения буфера и вероятности потери пакета для систем с самоподобным входящим потоком и однородными источниками, использующих режим ATM, были получены в работах Цыбакова, [8] - [11], [15]. Приведем краткое описание этой модели.

Мы рассматриваем входящий поток

$$Y = (\ldots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \ldots),$$

где $Y_t \in \{0, 1, ...\}$, $t \in Z = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ — это количество пакетов, сгенерированных всеми активными источниками в момент времени t. Без ограничения общности полагаем, что длина каждого пакета равна единице.

Обозначим через ω_s, τ_s и $\theta_s(i) \in Z^+$ начало и длину активного периода источника $s \in Z^+$ и число пакетов, сгенерированных источником s в момент $\omega_s + i - 1$. Пусть $\theta_s(i) > 0$ для любых $i \in \{1, \ldots \tau_s\}$ и $\theta_s(i) = 0$ при $i \leq 0$, $i \geq \tau_s + 1$.

Через $\xi_t \in Z_+$ обозначим число источников, «проснувшихся» в момент t. Рассматриваемый трафик есть суперпозиция пакетов, генерируемых различными активными в момент t источниками

$$Y_t = \sum_{s \in Z} \theta_s(t - \omega_s + 1),\ t \in Z.$$

Предположим, что

1) случайные величины τ_s, $s \in Z_+$ н.о.р.;

2) случайные величины ξ_t, $t \in Z^+$ н.о.р., и ξ_t имеет распределение Пуассона, то есть $P\{\xi_t = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, 0 < \lambda < \infty, \quad k \in Z^+$;

3) случайные величины τ_s взаимно независимы с ξ_t и ω_s;

4) источники имеют постоянную скорость: $\theta_s(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \{1, ..., \tau_s\}, \\ 0, & \text{если } i \leq 0, \quad i \geq \tau_s + 1. \end{cases}$

Тогда распределение Y_t для каждого t является пуассоновским, со средним $EY_t = \lambda E\tau$ и дисперсией $DY_t = \lambda E\tau$ соответственно. Здесь с.в. ξ и τ имеют такое же распределение, как ξ_t и τ_s.

Данную модель входящего потока часто называют $M/G/1$ моделью, где символ M отвечает за Пуассоновский поток ξ_t, а G есть распределение независимых одинаковых времен обслуживания τ_s.

Если длины активных периодов τ_s для всех $s \in Z^+$ и всех $l \in N$ имеют дискретное распределение Парето, то есть

$$P(\tau_s = l) = c_0 l^{-\alpha-1},\ c_0 = \left(\sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-1} \right)^{-1},\ 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

то поток Y_t будет асимптотически самоподобным процессом с параметром Херста $H = \frac{3-\alpha}{2}$. Так как $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ при $1 < \alpha < 2$, то $\{Y_t\}$, $t \geq 0$ это процесс с долгой памятью. Кроме того при $1 < \alpha < 2$ с.в. τ_s имеют конечное среднее и бесконечную дисперсию.

Далее будем рассматривать систему $Y/D/1/h$, где Y есть входящий процесс описанный выше, D — постоянное время обслуживания для пакета равное 1, третий параметр, равный 1, означает, что в системе есть только одно обслуживающее устройство (канал), $h < \infty$ это размер буфера в пакетах.

Конечный размер буфера означает, что он может хранить не более чем h пакетов в любой момент времени t. В каждом временном окне $[t, t+1)$ канал передает не более чем C пакетов, которые берутся либо из буфера, либо из Y_t новых пакетов. Пакет, который обслуживается в окне $[t, t+1)$, уходит из системы в момент $t+1$. Величина C называется *пропускной способностью канала*. Далее мы полагаем $C = 1$.

В каждый момент времени t в канале может находиться не более одного пакета, а буфер не может хранить более h пакетов, следовательно если $h+1 < Y_t$, то часть пакетов обязательно будет утеряна. Обозначим через $Z = (\ldots, Z_{-1}, Z_0, Z_1, \ldots)$ количество пакетов, находящихся в буфере в момент времени t.

Наиболее интересным классом дисциплин обслуживания d является класс $D_C(h)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) если $Y_t + Z_t > 0$, тогда $min\{Y_t + Z_t, 1\}$ пакетов попадает в канал в момент времени t;

2) если $Y_t + Z_t \leq h + 1$, тогда ни один пакет не теряется в момент времени t;

3) если же $Y_t + Z_t > h + 1$, то $Y_t + Z_t - h - 1$ пакетов теряется в момент времени t.

Какие именно пакеты выбираются для обслуживания, а какие теряются, определяется конкретной дисциплиной $d \in D_C(h)$.

Событие $Y_t + Z_t > h+1$ называется переполнением буфера в момент t. Момент t называется моментом переполнения, если теряется хотя бы один сгенерированный в момент t пакет.

В работах [8] - [11] было доказано, что для системы $Y/D/1/h$ для вероятности потери пакета в стационарном режиме справедливы следующие границы.

Теорема 1. *(Цыбаков).*

Если $E\tau < \infty$ и $P(\xi = 0) < 1$, то в СМО $Y/D/1/h$ с произвольной дисциплиной обслуживания из класса $D(h)$ для вероятности потери пакета справедливы следующие асимптотические границы:

$$P_{loss} \geq \frac{1}{\lambda E\tau (E\tau + E\kappa)^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} P(\tau \geq n), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= \left[\frac{h+b}{a}\right] + 2, \quad E\kappa = [1 - P(\xi = 0)]^{-1} - 1, \\ a &= (E\tau + E\kappa)^{-1} \leq 1, \quad b = a + 1 \end{aligned}$$

и

$$P_{loss} \leq \frac{1}{(1 - \lambda E\tau) E\tau} \sum_{n=h}^{\infty} P(\tau \geq n), \quad \lambda E\tau < 1 \tag{3}$$

Если случайная величина τ имеет дискретное распределение Парето, то нижняя и верхняя границы для вероятности потери пакета при $h \to \infty$ будут иметь вид

$$P_{loss} \geq \frac{c_0}{\alpha(\alpha-1)\lambda E\tau(E\tau+E\kappa)^2}\left(\left[\frac{h+b}{a}\right]+2\right)^{-\alpha+1}, \tag{4}$$

и

$$P_{loss} \leq \frac{c_0}{\alpha(\alpha-1)E\tau(1-\lambda E\tau)}h^{-\alpha+1}, \tag{5}$$

где $\lambda E(\tau) < 1$

Для больших h мы получаем

$$P_{loss} \geq c_{low}h^{-\alpha+1} \tag{6}$$

и

$$P_{loss} \leq c_{upper}h^{-\alpha+1}. \tag{7}$$

При этом константы

$$c_{low} = \frac{c_0}{\alpha(\alpha-1)\lambda E\tau(E\tau+E\kappa)^{\alpha+1}} \tag{8}$$

и

$$c_{upper} = \frac{c_0}{\alpha(\alpha-1)E\tau(1-\lambda E\tau)} \tag{9}$$

зависят от $\lambda, \alpha, E\tau$ и *не зависят от* h.

Таким образом, границы (6) и (7) с точностью до множителя, не зависящего от h, дают скорость убывания вероятности потери пакета с ростом размера буфера h. Отметим, что в отличие от традиционных моделей телетрафика вероятность P_{loss} убывает с ростом h не экспоненциально, а степенным образом.

Вероятность потери пакета тесно связана с вероятностью переполнения буфера. В частности, при сделанных выше предположениях относительно трафика Y_t для P_{over} справедливы следующие асимптотические границы:

$$P_{over} \geq \frac{c_0}{\alpha(\alpha-1)(E\tau+E\kappa)^{\alpha+1}}h^{-\alpha+1} = q_1 h^{-\alpha+1} \tag{10}$$

и

$$P_{over} \leq \frac{c_0\lambda}{\alpha(\alpha-1)(1-\lambda E\tau)}h^{-\alpha+1} = q_2 h^{-\alpha+1}. \tag{11}$$

Вероятность P_{over} также убывает с ростом h не экспоненциально, а степенным образом.

2. Модель с неоднородным входящим потоком

Границы, полученные Цыбаковым Б.С., очень удобны в практических приложениях, поскольку зависят от размера буфера h и некоторой *явно вычисляемой* *константы, от h не зависящей.* Хотелось бы получить аналогичные результаты для СМО с неоднородным входящим потоком.

Предположим, что в системе связи источники могут быть $2 \le r < \infty$ разных типов ([1]). Иными словами каждый источник типа k, $k = 1, \dots, r$ характеризуется свойственной ему длиной активного периода $\tau^{(k)}$, которая имеет распределение Парето с параметром $\alpha^{(k)}$, где $1 \le k \le r$:

$$P(\tau^{(k)} = n) = c_0^{(k)} n^{-\alpha^{(k)}-1}, \quad 1 < \alpha^{(1)} < \dots \alpha^{(r)} < 2. \tag{12}$$

В этом случае $\xi_t = \xi_t^{(1)} + ... + \xi_t^{(r)}$, где $\xi_t^{(i)}$ есть количество источников типа i, «проснувшихся» в момент t. С.в. $\xi_t^{(i)}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda^{(i)}, 1 \le i \le r$. Потребуем, чтобы величины $\xi_t^{(i)}, 1 \le i \le r$ были независимы. Тогда ξ_t также имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda^{(1)} + ... + \lambda^{(r)}$. Предположим также, что величина $\lambda = const$, а величины $\lambda^{(i)}, 1 \le i \le r$ могут изменятся. Таким образом, мы можем изменять доли, отведенные источникам каждого типа в общем потоке, оставляя при этом неизменным интенсивность общего потока.

Каждый источник независимо от его типа генерирует $R = 1$ пакетов во время своего периода активности. Размер буфера равен $h < \infty$, пропускная способность канала C равна 1. Какого типа пакет теряется при переполнении буфера, зависит от конкретной дисциплины $d \in D(h)$ и на дальнейшие рассуждения не влияет.

Рассмотрим новый входящий процесс $Y^* = Y^{(1)} + \dots + Y^{(r)}$, который есть суперпозиция независимых процессов $Y^{(k)}$, $k = 1, \dots, r$ определенных выше.

Определим величины $d^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda}$. Тогда распределения новых с.в. ξ^* и τ^* будут смесью распределений с.в. $\xi^{(k)}$ и $\tau^{(k)}$ соответственно, взятых с весами $d^{(k)}$, то есть

$$P\{\xi^* = m\} = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} P\{\xi^{(k)} = m\} = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} \frac{(\lambda^{(k)})^m}{m!} e^{-\lambda^{(k)}} \tag{13}$$

и

$$P\{\tau^* = x\} = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} P\{\tau^{(k)} = x\} = \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} c_0^{(k)} x^{-\alpha^{(k)}-1}. \tag{14}$$

При фиксированных $\lambda^{(k)}$ и λ первое слагаемое с ростом x убывает медленнее чем все остальные и на бесконечности $P\{\tau^* = x\}$ приобретает асимптотику $cx^{-\alpha^{(1)}-1}$, то есть асимптотика $P\{\tau^* = x\}$ совпадает с асимптотикой самого «тяжелого» распределения из $\mathcal{P}$.

С практической точки зрения интересна ситуация, когда «тяжелые» заявки приходят редко, а основную нагрузку порождают относительно более «легкие» заявки.

Выберем веса $d^{(k)}$ следующим образом

$$\begin{aligned} d^{(k)} &= h^{\alpha^{(k)}-\alpha^{(r)}}, k = 1, \dots, r-1 \\ d^{(r)} &= 1 - d^{(1)} - \dots - d^{(r-1)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Легко видеть, что $d^{(r)} \to 1$, $d^{(k)} \to 0$, $k = 1, \dots, r-1$ при $h \to \infty$.

Если λ фиксировано, то распределения с.в. ξ^* и τ^* не будут зависеть от h. Используя (2) и (3) и тот факт, что $E\tau^* = \sum d^{(k)} E\tau^{(k)} \to E\tau^r$ при $h \to \infty$, мы получаем, что

$$P_{loss} \geq \frac{1}{\lambda E\tau^*(E\tau^* + E\kappa^*)^2} \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} P(\tau^{(k)} \geq n). \tag{16}$$

и

$$P_{loss} \leq \frac{1}{E\tau^*(1 - \lambda E\tau^*)} \sum_{n=h}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} d^{(k)} P(\tau^{(k)} \geq n). \tag{17}$$

Поскольку

$$\frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}} n^{-\alpha^{(k)}} \leq P(\tau^{(k)} \geq n) \leq \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}} (n-1)^{-\alpha^{(k)}}$$

и

$$\frac{1}{(\alpha^{(k)} - 1)} n_1^{-\alpha^{(k)}+1} \leq \sum_{n=n_1}^{\infty} n^{-\alpha^{(k)}} \leq \frac{1}{(\alpha^{(k)} - 1)} (n_1 - 2)^{-\alpha^{(k)}+1}, \ n_1 > 2, \ 1 < \alpha^{(k)} < 2,$$

из (12) и (15) следует, что

$$d^{(k)} \sum_{n=n_1^*}^{\infty} P(\tau^{(k)} \geq n) \geq \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}} \sum_{n=n_1^*}^{\infty} n^{-\alpha^{(k)}} \geq \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)} (n_1^*)^{-\alpha^{(k)}+1}$$

и

$$d^{(k)} \sum_{n=h}^{\infty} P(\tau^{(k)} \geq n) \leq \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}} \sum_{n=h}^{\infty} (n-1)^{-\alpha^{(k)}} \leq \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)} (h-2)^{-\alpha^{(k)}+1}.$$

При больших h

$$\begin{aligned} \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)} (n_1^*)^{-\alpha^{(k)}+1} &\sim \tilde{c}_1^{(k)} h^{-\alpha^{(r)}+1} \\ \frac{d^{(k)} c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)} (h-2)^{-\alpha^{(k)}+1} &\sim \tilde{c}_2^{(k)} h^{-\alpha^{(r)}+1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем,

$$\tilde{c}_1 h^{-\alpha^{(r)}+1} \leq P_{loss} \leq \tilde{c}_2 h^{-\alpha^{(r)}+1}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{\lambda^{(r)} E\tau^{(r)}(E\tau^{(r)} + E\kappa^{(r)})^2} \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)} \tag{19}$$

и

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{E\tau^{(r)}(1 - \lambda^{(r)}E\tau^{(r)})} \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}. \quad (20)$$

Таким образом, варьируя доли источников разных типов в общем потоке, можно показать, что любой из источников способен влиять нетривиальным образом на вероятность потери пакета.

В работе [1] для модели Цыбакова с неоднородными источниками была получена нижняя асимптотическая граница для вероятности переполнения буфера в стационарном режиме:

$$P_{over} \geq \tilde{q}_1 h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad (21)$$

где

$$\tilde{q}_1 = \frac{1}{(E\tau^{(r)} + E\kappa^{(r)})^2} \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}. \quad (22)$$

Заметим, что для вероятности переполнения буфера в стационарном режиме справедлива также асимптотическая верхняя граница:

$$P_{over} \leq \tilde{q}_2 h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad (23)$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{\lambda^{(r)}}{(1 - \lambda^{(r)}E\tau^{(r)})} \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}. \quad (24)$$

И вновь, изменяя доли источников разных типов в общем потоке, можно показать, что любой из источников способен влиять нетривиальным образом на вероятность переполнения буфера.

Список литературы

[1] D'Apice C., Khokhlov Yu. S., Sidorova O.I. Bounds to buffer-overflow probability in the case of different distributions of system active periods. – In Transactions of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation, St. Peterburg, Russia, June 26 - July 2, 2005 , pp. 00-00.

[2] Crovella M., Bestavros A. Self-similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases. In Proceedings of the 1996 ACMSIGMETICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems, 1996, May.

[3] Feldmann A., Gilbert A.C., Willinger W. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic. In Proc. ACM SIGCOMM T98, 1998, pp. 42-55.

[4] Leland W. E., Taqqu, M. S., Willinger W., Willson D. V. On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended version), IEEE/ACM Trans. Networking 2, 1994, pp. 1-15.

[5] Likhanov N., Tsybakov B., Georganas N. D. Analysis of an ATM buffer with Self - Similar («Fractal») Input traffic.- Proc, IEEE INFOCOM'95, Boston, MA, 1995, pp. 985-992.

[6] Paxton V., Floyd S. Wide-area traffic:The failure of Poisson modelling. In Proc, ACM SIGCOMM'94, 1994, pp. 257-268.

[7] Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W. Is network traffic self-similar or multifractal? Fractals 5, 1997, pp. 63-73.

[8] Tsybakov B., Georganas N. D. On selfsimilar traffic in ATM queues: Definitions, overflow probability bound and cell delay distribution. IEEE/ACM Trans. Networking, 5(3), 1997, pp. 379-409.

[9] Tsybakov B., Georganas N. D. Selfsimilar traffic and upper bounds to buffer overflow in an ATM queue. Performance Evaluation, 36(1), 1998, pp. 57-80.

[10] Tsybakov B., Georganas N. D. Overflow and loss probabilities in a finite ATM buffer fed by self-similar traffic. Queueing systems 32, 1999, pp. 233-256.

[11] Tsybakov B., Georganas N. D. Overflow and losses in a network queue with a self-similar input. Queueing systems 35, 2000, pp. 201-235.

[12] Галактионова О.В., Жукова Е.А., Сидорова О.И. Границы для вероятности переполнения буфера сервера в случае конечного числа различных распределений активных периодов. – Международная конференция студентов и аспирантов «Ломоносов-2005».

[13] Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Вероятность переполнения буфера в модели с различными распределениями длины активных периодов. Обозрение прикладной и промышленной математики, том 14, выпуск 1, 2007, с. 78-79.

[14] Хохлов Ю.С., Сидорова О.И., Аппроксимация вероятности переполнения буфера для случая различных распределений длины активных периодов. – Сложные системы: Обработка информации, моделирование и оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 2. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004, с. 68-77.

[15] Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса.– Радиотехника, 5, с. 24-31, 1999.