ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 41 2005 Вып. 3

УДК 621.394.74:519.2

© 2005 г. Б. С. Цыбаков

ПЕРИОДЫ ЗАНЯТОСТИ В СИСТЕМЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ОБСЛУЖИВАЮЩИМИ ПРИБОРАМИ ИЛИ КАНАЛАМИ

Рассматривается система с множеством каналов связи, имеющих различные скорости передачи. Дается решение интересной для такой системы задачи отыскания плотности распределения вероятности и функции распределения вероятности длины периода занятости порядка N. Решение в случае одинаковых каналов (обслуживающих приборов) было дано в [1].

§ 1. Введение

Рассматривается система с множеством каналов, имеющих различные скорости передачи. Для такой системы представляет интерес отыскание распределения вероятностей времени, в течение которого заданное или большее число каналов являются занятыми. Задача, рассматриваемая в этой статье, может быть сформулирована как отыскание распределения вероятностей длины периода занятости порядка N в системе массового обслуживания $M/M/\infty$.

Система $M/M/\infty$ находится в состоянии n в момент времени t, если она имеет ровно n занятых приборов в момент t, $n \in \{0, 1, \ldots\}$. В состоянии n система обслуживает n требований. Обозначим через τ'_n длину интервала времени, который начинается в момент $t = 0$, когда система в состоянии n; в течение этого интервала система находится в состояниях, которые больше или равны n; в момент τ'_n система переходит в состояние $n-1$ в первый раз после $t = 0$. Назовем этот интервал *периодом занятости порядка* n, а момент τ'_n назовем *длиной периода занятости порядка* n, $n \geq 1$. Если $n = 1$, то период занятости порядка 1 – это обычный период занятости, который рассматривается для систем $M/M/m$, $m < \infty$ (см., например, [2–6]).

Введем следующие обозначения. Пусть случайная величина ξ обозначает интервал между поступлениями требований и имеет плотность распределения вероятностей

$$p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad p_\xi(x) = 0, \quad x < 0. \tag{1}$$

В (1) параметр λ обозначает интенсивность пуассоновского потока поступающих требований.

Пусть случайная величина η_n обозначает время обслуживания в состоянии n. Время обслуживания в состоянии $n \geq 1$ есть время между моментом, когда система входит в состояние n, и моментом, когда требование получает обслуживание и покидает систему при условии, что нет новых поступлений требований между этими моментами. Предполагается, что η_n имеет плотность распределения вероятностей

$$p_{\eta_n}(x) = \mu_n e^{-\mu_n x}, \quad x \geq 0; \quad p_{\eta_n}(x) = 0, \quad x < 0, \tag{2}$$

где μ_n – средняя скорость обслуживания в состоянии n.

Будем считать, что приборы нумеруются числами $1, 2, \ldots$, и в каждый момент, когда требование покидает систему, все оставшиеся в системе требования занимают приборы, имеющие наименьшие номера. Будем считать, что $\mu_{n+1} > \mu_n$ и $\mu_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Например, μ_n может быть таким, что $\mu_n = \mu_1 + (n-1)\mu$, где μ_1 и μ заданы. В приложениях к системам связи приборы являются каналами и этот пример предполагает, что скорость передачи первого канала не равна скоростям передачи других каналов, имеющих равные скорости. Величина $(\mu_{n+1} - \mu_n)$ – средняя скорость обслуживания n-го прибора.

Наша задача – найти плотность распределения вероятностей $p_{\tau'_N}(t)$ и функцию распределения вероятностей $Q(T) = \int\limits_0^T p_{\tau'_N}(t)dt$ длины периода занятости порядка N.

Важный частный случай, в котором все приборы в системе одинаковы со скоростью обслуживания, равной 1, т.е. $\mu_n = n$, был рассмотрен в [1], где доказано, что

$$Q(T) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} e^{-k_1 T} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+1+k)!(-\lambda)^k}{\Gamma(N+2-k_l+k)k!} \right) \Big/ k_l \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k)!(-\lambda)^k}{\Gamma(N+1-k_l+k)k!} \right). \quad (3)$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, k_l, $\quad l = 1, 2, \ldots$, – нули функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(N+k)!(-\lambda)^k}{\Gamma(N+1-x+k)k!}, \quad (4)$$

а $(f(k_i))'$ – производная по x функции $f(x)$ при $x = k_l$.

Также рассматривался случай $\mu_n = n$ и связанная с ним задача времени пребывания процесса рождения и гибели выше заданного уровня.

Анализируя динамические словари, работа [7] вводит время пребывания системы $M/M/\infty$ выше заданного порога при условии, что система находится в равновесии в момент 0. Распределение этого времени было найдено с помощью корней многочленов Пуассона–Шарлье.

Преобразование Лапласа функции $p_{\tau'_N}(t)$ найдено в работе [8], а функция $Q(T)$ оценивается численно в [9] с помощью введенного метода деинформизации. Метод, примененный в [8], основан на использовании производящих функций и контурного интегрирования. После опубликования работ [8, 9] в [10] был дан ряд дополнений и обобщений, использующих более простые методы.

В [11] анализ, проведенный в [1], распространяется на более общие процессы рождения и гибели.

В работе [12] рассматривается обобщение системы $M/M/\infty$ на случай группового поступления требований. Дается распределение вероятностей времени после момента t до момента, когда система становится пустой, при условии, что новые требования не обслуживаются после момента t.

В [13] рассматривается система $M/G/\infty$ и даются результаты, связанные с функцией распределения вероятностей длины периода занятости и распределением вероятностей числа периодов занятости, в которых обслуживается заданное число требований, поступающих в заданном интервале времени. Ранее в [14] рассматривалась связь задачи отыскания распределения периода занятости системы $M/G/\infty$ с так называемыми задачами геометрической вероятности и приводились результаты решения задачи покрытия случайными интервалами.

В [15] анализируется так называемая система *пачки*/M/∞ с пуассоновским процессом поступления требований, который включается и выключается в моменты изменения независимого альтернативного процесса регенерации. Она доказывает, что равновесное распределение числа требований в системе с пачками полностью описывается в терминах используемого в этой работе понятия перпетрума (решения случайных дифференциальных уравнений), и использует этот результат для отыскания вероятности того, что число требований в системе выше заданного уровня.

В § 2 настоящей статьи найдены плотность вероятности $p_{\tau'_N}(t)$ и функция распределения вероятностей $Q(T)$ в общем случае μ_n. Вывод $p_{\tau'_N}(t)$ аналогичен выводу, предложенному в [1] для случая $\mu_n = n$. По этой причине детали вывода опускаются. Однако имеется отличие в выводах, использованных в [1] и в § 2 статьи. Результаты работы [1] связаны с нулями функции (4), которые являются действительными, если $\mu_n = n$, а результаты § 2 связаны с комплексными нулями в общем случае μ_n. По этой причине теоремы о нулях, использованные в [1], не работают в нашем рассмотрении. В § 2 функция $p_{\tau'_N}(t)$ представлена как обратное преобразование Лапласа предельной последовательности аппроксимаций для преобразований Лапласа функции $p_{\tau'_N}(t)$. Эта предельная последовательность также дает аппроксимации для $p_{\tau'_N}(t)$. В конце § 2 сформулированы результаты в виде теоремы. В § 3 даются численные примеры, которые иллюстрируют результаты. В случае $\mu_n = n$ они показывают сравнение аппроксимаций, полученных в [1] и в § 2 статьи (см. рис. 2 в § 3). В § 4 дается нижняя граница для $Q(T)$ при $\lambda < \mu_N$.

§ 2. Плотность распределения вероятностей периода занятости порядка N

Сначала будет найдено преобразование Лапласа $\widetilde{p}_{\tau'_N}(s)$ функции $p_{\tau'_N}(t)$, а затем сама функция $p_{\tau'_N}(t)$. Эти результаты сформулированы в виде теоремы (см. ниже).

Пусть в момент $t = 0$ система находится в состоянии $n = N$. Имеет место равенство

$$\tau'_N = \begin{cases} \eta_N, & \text{если} \quad \eta_N \le \xi, \\ \xi + \tau_{N+1} + \tau_N, & \text{если} \quad \eta_N > \xi, \end{cases} \tag{5}$$

которое обозначает следующее. Период занятости порядка N состоит только из времени, необходимого для обслуживания первого получающего обслуживание требования в состоянии N (это время η_N), если время поступления первого нового требования после $t = 0$ *больше* времени обслуживания η_N. Если время поступления первого нового требования после $t = 0$ *меньше* времени обслуживания η_N, то период занятости порядка N состоит из времени поступления первого нового требования после $t = 0$ (это время ξ) плюс длина периода занятости порядка $N + 1$, который начинается при $t = \xi$ (длина этого периода обозначается τ_{N+1}), плюс длина периода занятости порядка N, который начинается при $t = \xi + \tau_{N+1}$ (длина этого периода обозначается τ_N).

Случайная величина τ_N имеет то же распределение вероятностей, что и τ'_N, т.е. $\Pr\{\tau'_N \le x\} = \Pr\{\tau_N \le x\}$. Аналогично, $\Pr\{\tau'_{N+1} \le x\}=\Pr\ \{\tau_{N+1} \le x\}$. Поэтому не будем делать различия между τ'_N и τ_N. Также заметим, что так как мы рассматриваем не дискретные случайные величины, то такие события как $\tau_N \le x$ и $\tau_N < x$ имеют одинаковые вероятности. Это было принято во внимание выше, а также будет использоваться ниже.

Из (5) следует следующее уравнение для $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$ (см. [1, формула (2.2)] в случае $\eta_n = n$):

$$\widetilde{p}_{\tau_N}(s) = \frac{\mu_N}{s + \lambda + \mu_N} + \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu_N} \widetilde{p}_{\tau_N}(s) \widetilde{p}_{\tau_{N+1}}(s). \tag{6}$$

Уравнение (6) для $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$ является рекуррентным и нелинейным.

Теперь, как и в [1] при $\mu_n = n$, мы дадим решение для уравнения (6). Имеем

$$\widetilde{p}_{\tau_N}(s) = \frac{a_N(s)}{1 - b_N(s)\widetilde{p}_{\tau_{N+1}}(s)}, \tag{7}$$

где

$$a_N(s) = \frac{\mu_N}{s + \lambda + \mu_N} \quad \text{и} \quad b_N(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + \mu_N}. \tag{8}$$

Решение (7) для $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ есть

$$\widetilde{p}_{\tau_1}(s) = \frac{a_1(s)}{1 - b_1(s)\widetilde{p}_{\tau_2}(s)}, \tag{9}$$

$$\widetilde{p}_{\tau_1}(s) = \frac{a_1(s)}{1 - b_1(s)\dfrac{a_2(s)}{1 - b_2(s)\widetilde{p}_{\tau_3}(s)}}, \tag{10}$$

$$\widetilde{p}_{\tau_1}(s) = \frac{a_1(s)}{1 - b_1(s)\dfrac{a_2(s)}{1 - b_2(s)\dfrac{a_3(s)}{1 - b_3(s)\widetilde{p}_{\tau_4}(s)}}} \tag{11}$$

и т.д.

Равенство (9) выражает $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ через $\widetilde{p}_{\tau_2}(s)$, равенство (10) выражает $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ через $\widetilde{p}_{\tau_3}(s)$, равенство (11) выражает $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ через $\widetilde{p}_{\tau_4}(s)$ и т.д. Переходя к пределу, окончательно получаем выражение для $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ через $\widetilde{p}_{\tau_\infty}(s)$. Если $N \to \infty$, то $\mu_N \to \infty$, и (6) показывает, что $\widetilde{p}_{\tau_N}(s) \to 1$ при $N \to \infty$.

Таким образом, как в [1] при $\mu_n = n$, в последовательности (9), (10), (11), ... функция $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ имеет предельное выражение с $\widetilde{p}_{\tau_\infty}(s) = 1$.

Можно использовать последовательность (9), (10), (11), ... для получения аппроксимаций $\widetilde{p}^{(1)}_{\tau_1}(s), \widetilde{p}^{(2)}_{\tau_1}(s), \widetilde{p}^{(3)}_{\tau_1}(s), \ldots$ для функции $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$.

Делая первую аппроксимацию $\widetilde{p}^{(1)}_{\tau_1}(s)$, мы можем использовать (9) с $\widetilde{p}_{\tau_2}(s) = 1$. Получим

$$\widetilde{p}^{(1)}_{\tau_1}(s) = \frac{\mu_1}{s + \mu_1}. \tag{12}$$

Делая вторую аппроксимацию $\widetilde{p}^{(2)}_{\tau_1}(s)$, мы можем использовать (10) с $\widetilde{p}_{\tau_3}(s) = 1$. Получим

$$\widetilde{p}^{(2)}_{\tau_1}(s) = \frac{\mu_1 R_2(s, \lambda, \mu_2)}{U_2(s, \lambda, \mu_1, \mu_2)}, \tag{13}$$

где

$$R_2(s, \lambda, \mu_2) = s + \mu_2, \tag{14}$$

$$U_2(s, \lambda, \mu_1, \mu_2) = (s + \lambda + \mu_1)R_2(s, \lambda, \mu_2) - \lambda\mu_2 D_2, \tag{15}$$

$$D_2 = 1. \tag{16}$$

Заметим, что $R_2(s, \lambda, \mu_2)$ от λ не зависит.

Делая третью аппроксимацию $\widetilde{p}^{(3)}_{\tau_1}(s)$, мы можем использовать (11) с $\widetilde{p}_{\tau_4}(s) = 1$. Получим

$$\widetilde{p}^{(3)}_{\tau_1}(s) = \frac{\mu_1 R_3(s,\lambda,\mu_2,\mu_3)}{U_3(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3)}, \tag{17}$$

где

$$R_3(s,\lambda,\mu_2,\mu_3) = U_2(s,\lambda,\mu_2,\mu_3), \tag{18}$$

$$U_3(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3) = (s+\lambda+\mu_1)R_3(s,\lambda,\mu_2,\mu_3) - \lambda\mu_2 D_3(s,\lambda,\mu_3), \tag{19}$$

$$D_3(s,\lambda,\mu_3) = R_2(s,\lambda,\mu_3). \tag{20}$$

Заметим, что $D_3(s,\lambda,\mu_2)$ от λ не зависит.

Делая k-ю аппроксимацию так же, как выше, получим

$$\widetilde{p}^{(k)}_{\tau_1}(s) = \frac{\mu_1 R_k(s,\lambda,\mu_2,\dots,\mu_k)}{U_k(s,\lambda,\mu_1,\dots,\mu_k)}, \qquad k \geq 4, \tag{21}$$

где

$$R_k(s,\lambda,\mu_2,\dots,\mu_k) = U_{k-1}(s,\lambda,\mu_2,\dots,\mu_k), \tag{22}$$

$$U_k(s,\lambda,\mu_1,\dots,\mu_k) = (s+\lambda+\mu_1)R_k(s,\lambda,\mu_2,\dots,\mu_k) - \lambda\mu_2 D_k(s,\lambda,\mu_3,\dots,\mu_k), \tag{23}$$

$$D_k(s,\lambda,\mu_3,\dots,\mu_k) = R_{k-1}(s,\lambda,\mu_3,\dots,\mu_k). \tag{24}$$

Явные выражения для функций $R_k(\cdot)$ и $U_k(\cdot)$, участвующих в первых четырех аппроксимациях ($k = 2,\dots,4$), даются равенствами

$$R_2(s,\lambda,\mu_2) = s + \mu_2, \tag{25}$$

$$U_2(s,\lambda,\mu_1,\mu_2) = s^2 + s(\lambda+\mu_1+\mu_2) + \mu_1\mu_2, \tag{26}$$

$$R_3(s,\lambda,\mu_2,\mu_3) = s^2 + s(\lambda+\mu_2+\mu_3) + \mu_2\mu_3, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} U_3(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3) &= s^3 + s^2(2\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3) + \\ &+ s(\lambda^2+\lambda\mu_1+\lambda\mu_3+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_2\mu_3) + \mu_1\mu_2\mu_3, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} R_4(s,\lambda,\mu_2,\mu_3,\mu_4) &= s^3 + s^2(2\lambda+\mu_2+\mu_3+\mu_4) + \\ &+ s(\lambda^2+\lambda\mu_2+\lambda\mu_4+\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4) + \mu_2\mu_3\mu_4, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} U_4(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) &= s^4 + s^3(3\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4) + \\ &+ s^2(3\lambda^2+2\lambda\mu_2+\lambda\mu_3+2\lambda\mu_4+\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+\mu_1\mu_4+\mu_2\mu_3+\mu_2\mu_4+\mu_3\mu_4) + \\ &+ s(\lambda^3+\lambda^2\mu_1+\lambda^2\mu_4+\lambda\mu_1\mu_2+\lambda\mu_1\mu_4+\lambda\mu_3\mu_4 + \\ &+ \mu_1\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_2\mu_4+\mu_1\mu_3\mu_4+\mu_2\mu_3\mu_4) + \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned} \tag{30}$$

В случае $\mu_n = n\mu_1$ равенства (25)–(30) становятся следующими:

$$R_2(s,\lambda,\mu_2) = R_2(s,\lambda,\mu_1) = s + 2\mu_1, \tag{31}$$

$$U_2(s,\lambda,\mu_1,\mu_2) = U_2(s,\lambda,\mu_1) = s^2 + s(\lambda + 3\mu_1) + 2\mu_1^2, \tag{32}$$

$$R_3(s,\lambda,\mu_2,\mu_3) = R_3(s,\lambda,\mu_1) = s^2 + s(\lambda + 5\mu_1) + 6\mu_1^2, \tag{33}$$

$$U_3(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3) = U_3(s,\lambda,\mu_1) = \\ = s^3 + s^2(2\lambda + 6\mu_1) + s(\lambda^2 + 4\lambda\mu_1 + 11\mu_1^2) + 6\mu_1^3, \tag{34}$$

$$R_4(s,\lambda,\mu_2,\mu_3,\mu_4) = R_4(s,\lambda,\mu_1) = \\ = s^3 + s^2(2\lambda + 9\mu_1) + s(\lambda^2 + 6\lambda\mu_1 + 26\mu_1^2) + 24\mu_1^3, \tag{35}$$

$$U_4(s,\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) = U_4(s,\lambda,\mu_1) = \\ = s^4 + s^3(3\lambda + 10\mu_1) + s^2(3\lambda^2 + 15\lambda\mu_1 + 35\mu_1^2) + \\ + s(\lambda^3 + 5\lambda^2\mu_1 + 18\lambda\mu_1^2 + 50\mu_1^3) + 24\mu_1^4. \tag{36}$$

Аппроксимации $\widetilde{p}^{(k)}_{\tau_1}(s)$ сходятся к $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ при $k \to \infty$.

Аппроксимация $\widetilde{p}^{(k)}_{\tau_1}(s)$ представляет собой отношение $\dfrac{\mu_1 R_k(s,\lambda,\mu_2,\ldots,\mu_k)}{U_k(s,\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_k)}$ многочлена $\mu_1 R_k(s,\lambda,\mu_2,\ldots,\mu_k)$ по s (этот многочлен есть $c_k(s) = c_{0k}s^{k-1} + c_{1k}s^{k-2} + \ldots$ $\ldots + c_{k-1,k}$ с коэффициентами $c_{0k} = \mu_1$ и $c_{ik}, i > 0$, зависящими от $\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$) и многочлена $U_k(s,\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_k)$ по s (этот многочлен есть $d_k(s) = d_{0k}s^k + d_{1k}s^{k-1} + \ldots$ $\ldots + d_{kk}$ с коэффициентами $d_{0k} = 1$ и $d_{ik}, i > 0$, зависящими от $\lambda,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$).

Хорошо известно (см. [16]), что отношение многочленов $S_k(s) = c_k(s)/d_k(s)$ можно выразить как сумму k дробей

$$S_k(s) \triangleq \sum_{i\in I_0}\sum_{j=1}^{m_{ik}} \frac{h_{ijk}}{(s - s_{ik})^j}, \tag{37}$$

соответствующих корням s_{ik} (имеющим порядки m_{ik}) уравнения $d_k(s) = 0$ (здесь I_0 обозначает множество различных корней). Если все $m_{ik} = 1$, то

$$h_{ijk} = c_k(s_{ik})/(d_k(s_{ik}))', \tag{38}$$

где $(d_k(s_{ik}))'$ обозначает производную по s функции $d_k(s)$ в точке $s = s_{ik}$. Заметим, что некоторые h_{ijk} и s_{ik} могут быть *комплексными*, а $S_k(s)$ остается *действительным*.

Хорошо известно также, что отношение многочленов $S_k(s) = c_k(s)/d_k(s)$ может быть выражено как сумма $S_k(s) = S_{1k}(s) + S_{2k}(s)$, где $S_{1k}(s)$ – сумма дробей

$$S_{1k}(s) \triangleq \sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{m_{ik}} \frac{h^{(1)}_{ijk}}{(s - s_{ik})^j}, \tag{39}$$

соответствующих действительным корням s_{ik} (порядка m_{ik}) уравнения $d_k(s) = 0$ (здесь I_1 обозначает множество чисел различных действительных корней), а $S_{2k}(s)$ – сумма дробей

$$S_{2k}(s) \triangleq \sum_{i\in I_2}\sum_{j=1}^{m_{ik}} \frac{h^{(2)}_{ijk}(s + \nu_{ijk})}{[(s - \mathrm{Re}s_{ik})^2 + (\mathrm{Im}s_{ik})^2]^j}, \tag{40}$$

соответствующих парам комплексно-сопряженных корней (порядка m_{ik}) $(\mathrm{Re}s_{ik} + $ $+ i\mathrm{Im}s_{ik}, \mathrm{Re}s_{ik} - i\mathrm{Im}s_{ik})$ уравнения $d_k(s) = 0$ (здесь I_2 обозначает множество чисел различных пар комплексно-сопряженных корней). Коэффициенты $h_{ijk}^{(1)}, h_{ijk}^{(2)}$ и ν_{ijk} в (39) и (40) можно найти, приравнивая коэффициенты одинаковых степеней s в двух частях равенства $c_k(s) = d_k(s)(S_{1k}(s) + S_{2k}(s))$.

Так как в соответствии с (12), (13), (17), (21), (39) и (40) аппроксимация $\widetilde{p}_\tau^{(k)}(s)$ функции $\widetilde{p}_\tau(s)$ есть сумма $S(s)$ отношений $\widetilde{r}_{jk}^{(1)}(s) \triangleq h_{ijk}^{(1)}/(s - s_{ik})^j$ и $\widetilde{r}_{jk}^{(2)}(s) \triangleq$ $\triangleq h_{ijk}^{(2)}(s + \nu_{ijk})/[(s - \mathrm{Re}s_{ik})^2 + (\mathrm{Im}s_{ik})^2]^j$, то аппроксимация $p_{\tau_1}^{(k)}(t)$ функции $p_{\tau_1}(t)$, которая дается обратным преобразованием Лапласа функции $S_k(s)$, является суммой обратных преобразований Лапласа $r_{jk}^{(1)}(t)$ и $r_{jk}^{(2)}(t)$ функций $\widetilde{r}_{jk}^{(1)}(s)$ и $\widetilde{r}_{jk}^{(2)}(s)$ соответственно. Функции $r_{jk}^{(1)}(t)$ и $r_{jk}^{(2)}(t)$ для небольших j могут быть найдены в опубликованных таблицах преобразований Лапласа. Например,

$$r_{1k}^{(1)}(t) = h_{i1k}^{(1)} e^{s_{ik}t}, \tag{41}$$

$$r_{1k}^{(2)}(t) = h_{i1k}^{(2)} e^{(\mathrm{Re}s_{ik})t} \sin\{(\mathrm{Im}s_{ik})t + \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}s_{ik}/(\mathrm{Re}s_{ik} + \nu_{i1k})]\}. \tag{42}$$

(Равенство (41) будет использовано в § 3.)

Имеется гипотеза, что все действительные и комплексно-сопряженные корни s_{ik} уравнения $d_k(s) = 0$ имеют порядок 1. Если гипотеза верна, то требуются только равенства (41) и (42) для выражения $r_{jk}^{(1)}(t)$ и $r_{jk}^{(2)}(t)$.

Эта гипотеза верна в случае $\mu_n = n$ [1,17]. В этом случае многочлен $U_k(s, \lambda, \mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_k)$ имеет действительные отрицательные корни $s_{1k}, \ldots, s_{kk}$ порядка 1, и аппроксимация $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s)$ может быть представлена как

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s) = \sum_{i=l}^{k} \frac{h_{ik}}{s - s_{ik}}, \tag{43}$$

где

$$h_{ik} = \frac{\mu_1 R_k(s_{ik}, \lambda, \mu_2, \ldots, \mu_k)}{U_k'(s_{ik}, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k)}, \tag{44}$$

$U_k'(\cdot)$ – производная функции $U_k(s, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_k)$ по s при $s = s_{ik}$.

Таким образом, в случае $\mu_n = n$ можно найти аппроксимации $p_{\tau_1}^{(k)}(t)$ функции $p_{\tau_1}(t)$, используя (41) и (43). Имеем

$$p_{\tau_1}^{(k)}(t) = \sum_{i=l}^{k} h_{ik} e^{s_{ik}t} \tag{45}$$

Аппроксимация (45) похожа на сумму, взятую по $1 \le l \le k$ (вместо суммы по $1 \le l \le \infty$) в (3) с $N = 1$, но коэффициенты и показатели экспонент в (45) и (3) различны. Численная иллюстрация аппроксимаций (45) и (3) (с суммами в (3), взятыми по $1 \le l \le k$) дается в § 3 (см. рис. 2).

В общем случае μ_n так же, как $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s)$, – отношение многочленов, которое стремится к $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s)$ при $k \to \infty$, функция $p_{\tau_1}^{(k)}(t)$ стремится к $p_{\tau_1}(t)$ при $k \to \infty$. Кроме того, функция $Q^{(k)}(T) = \int_0^T p_{\tau_1}^{(k)}(t)dt$ является верхней границей для $Q(T) = \int_0^T p_{\tau_1}(t)dt$, так как замена $\widetilde{p}_{\tau_{n+1}}(s)$ в n-м члене последовательности (9), (10), (11), … на $\widetilde{p}_{\tau_\infty}(s) =$ $= 1$ означает, что при заданном n система проводит нулевое время в состоянии $n+1$, возвращаясь в состояние n немедленно.

Теперь, зная, как найти $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ и $p_{\tau_1}(t)$, мы переходим к следующему шагу отыскания выражения для $\widetilde{p}_{\tau_N}(s), N \geq 2$, через $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$. Решение (7) дает

$$\widetilde{p}_{\tau_2}(s) = \frac{1}{b_1(s)}\left(1 - \frac{a_1(s)}{\widetilde{p}_{\tau_1}(s)}\right), \tag{46}$$

$$\widetilde{p}_{\tau_3}(s) = \frac{1}{b_2(s)}\left(1 - \frac{a_2(s)}{\widetilde{p}_{\tau_2}(s)}\right) = \frac{1}{b_2(s)}\left(1 - \frac{a_2(s)}{\dfrac{1}{b_1(s)}\left(1 - \dfrac{a_1(s)}{\widetilde{p}_{\tau_1}(s)}\right)}\right), \tag{47}$$

$$\widetilde{p}_{\tau_4}(s) = \frac{1}{b_3(s)}\left(1 - \frac{a_3(s)}{\widetilde{p}_{\tau_3}(s)}\right) = \frac{1}{b_3(s)}\left(1 - \frac{a_3(s)}{\dfrac{1}{b_2(s)}\left(1 - \dfrac{a_2(s)}{\dfrac{1}{b_1(s)}\left(1 - \dfrac{a_1(s)}{\widetilde{p}_{\tau_1}(s)}\right)}\right)}\right) \tag{48}$$

и т.п. Общее рекуррентное уравнение имеет вид

$$\widetilde{p}_{\tau_{N+1}}(s) = \frac{1}{b_N(s)}\left[1 - \frac{a_N(s)}{\widetilde{p}_{\tau_N}(s)}\right]. \tag{49}$$

Если взять любое равенство из последовательности равенств (46), (47), (48)..., другими словами, если взять равенство, которое дает $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$ при заданном N, то, используя аппроксимирующую последовательность $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s), \widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s), \widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s), \ldots$ на том месте, где стоит $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$, мы получим аппроксимирующую последовательность $\widetilde{p}_{\tau_N}^{(k)}(s)$, $k = 2, 3, \ldots$, сходящуюся к $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$.

Сформулируем теперь полученные результаты в виде теоремы.

Теорема. *Преобразование Лапласа плотности распределения вероятности $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$ длины периода занятости порядка N, $N \geq 2$, для рассматриваемой системы $M/M/\infty$ с общим случаем μ_n дается равенствами* (46)–(48), ..., *и в общем виде – равенством* (49), *где $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ – предел последовательности* (9), (10), (11), ... *с* $\widetilde{p}_{\tau_\infty}(s) = 1$.

Аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s), \widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s), \widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s), \ldots$, стремящиеся к $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$, даются равенствами (12)–(24).

Последовательные члены $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s)$ аппроксимирующей последовательности $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s)$, $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s)$, $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s), \ldots$, используемые вместо $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ в равенстве для $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$ (здесь N задано, а равенство для $\widetilde{p}_{\tau_n}(s)$ берется из последовательности (46)–(48), ...), *дают аппроксимирующую последовательность $\widetilde{p}_{\tau_N}^{(k)}(s)$, стремящуюся к $\widetilde{p}_{\tau_N}(s)$. Последовательность $\widetilde{p}_{\tau_N}^{(k)}(t)$, соответствующая аппроксимирующей последовательности $\widetilde{p}_{\tau_N}^{(k)}(s), k = 2, 3, \ldots$, сходится к $p_{\tau_N}(t)$.*

Аппроксимация $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s)$ функции $\widetilde{p}_{\tau_1}(s)$ может быть представлена как функция $S_k(s)$, заданная равенствами (37) *и* (38), *или как $S_k(s) = S_{1k}(s) + S_{2k}(s)$, где $S_{1k}(s)$ и $S_{2k}(s)$ даны равенствами* (39) *и* (40). *Аппроксимация $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(t)$ функции $p_{\tau_1}(t)$ есть обратное преобразование Лапласа функции $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(k)}(s) = S_k(s)$. Аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(t)$, $p_{\tau_1}^{(2)}(t), p_{\tau_1}^{(3)}(t), \ldots$ сходятся к $p_{\tau_1}(t)$.*

Последовательность функций распределений $Q^{(k)}(T) = \int\limits_0^T p_{\tau_1}^{(k)}(t)dt$, $k = 2, 3, \ldots$, *стремится к* $Q(T) = \int\limits_0^T p_{\tau_1}(t)dt$.

§ 3. Численная иллюстрация результатов

Для иллюстрации результатов теоремы здесь приводятся три примера.

Пример 1. Этот пример дает четыре последовательные аппроксимации для $p_{\tau_1}(t)$ в случае $\lambda = 2$, $\mu_n = \mu_1 + (n-1)\mu$, $\mu_1 = 2$, $\mu = 0{,}5$.

Используя (12), получаем первые аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(1)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s) = \frac{2}{s+2} \tag{50}$$

и

$$p_{\tau_1}^{(1)}(t) = 2e^{-2t}. \tag{51}$$

Используя (13), получаем вторые аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(2)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s) = \frac{2(s+2{,}5)}{s^2+6{,}5s+5} = 2\left(\frac{h_{12}}{s-s_{12}} + \frac{h_{22}}{s-s_{22}}\right), \tag{52}$$

$$p_{\tau_1}^{(2)}(t) = 2\left(h_{12}e^{s_{12}t} + h_{22}e^{s_{22}t}\right), \tag{53}$$

$h_{12} = 0{,}659$, $\quad h_{22} = 0{,}341$, $\quad s_{12} = -5{,}608495\ldots$, $\quad s_{22} = -0{,}891504\ldots$

Используя (17), получаем третьи аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(3)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s) = \frac{2(s^2+7{,}5s+7{,}5)}{s^3+11{,}5s^2+32{,}5s+15} = 2\left(\frac{h_{13}}{s-s_{13}} + \frac{h_{23}}{s-s_{23}} + \frac{h_{33}}{s-s_{33}}\right), \tag{54}$$

$$p_{\tau_1}^{(3)}(t) = 2\left(h_{13}e^{s_{13}t} + h_{23}e^{s_{23}t} + h_{33}e^{s_{33}t}\right), \tag{55}$$

$h_{13} = 0{,}251631\ldots$, $\quad h_{23} = 0{,}574238\ldots$, $\quad h_{33} = 0{,}174130\ldots$,
$s_{13} = -7{,}362413\ldots$, $\quad s_{23} = -3{,}566301\ldots$, $\quad s_{33} = -0{,}571285\ldots$

Используя (21)–(24), получаем четвертые аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(4)}(s)$ и $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(4)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(4)}(s) = \frac{2(s^3+8s^2+16{,}75s+7{,}5)}{s^4+10s^3+30{,}75s^2+32{,}75s+7{,}5} =$$

$$= 2\left(\frac{h_{14}}{s-s_{14}} + \frac{h_{24}}{s-s_{24}} + \frac{h_{34}}{s-s_{34}} + \frac{h_{44}}{s-s_{44}}\right), \tag{56}$$

$$p_{\tau_1}^{(4)}(t) = 2(h_{14}e^{s_{14}t} + h_{24}e^{s_{24}t} + h_{34}e^{s_{34}t} + h_{44}e^{s_{44}t}) =$$

$$= 2\left\{h_{14}e^{s_{14}t} + 2e^{(\mathrm{Re}\, s_{24})t}\Big[\mathrm{Re} h_{24}\cdot\cos[(\mathrm{Im}\, s_{24})\cdot t] + \mathrm{Im} h_{34}\cdot\sin[(-\mathrm{Im} s_{34})\cdot t]\Big] + \right.$$

$$\left. + h_{44}e^{s_{44}t}\right\}, \tag{57}$$

$h_{14} = 0{,}201404\ldots$, $\quad \mathrm{Re} h_{24} = 0{,}342944\ldots$, $\quad \mathrm{Im}\, h_{24} = 0{,}353928\ldots$,
$\mathrm{Re}\, h_{34} = \mathrm{Re}\, h_{24}$, $\quad \mathrm{Im}\, h_{34} = -\mathrm{Im}\, h_{24}$, $\quad h_{44} = 0{,}112705$,
$s_{14} = -9{,}557073\ldots$, $\quad \mathrm{Re}\, s_{24} = -3{,}502631\ldots$, $\quad \mathrm{Im}\, s_{24} = -0{,}532005\ldots$,
$\mathrm{Re}\, s_{34} = \mathrm{Re}\, s_{24}$, $\quad \mathrm{Im}\, s_{34} = -\mathrm{Im}\, s_{24}$, $\quad s_{44} = -0{,}437663\ldots$

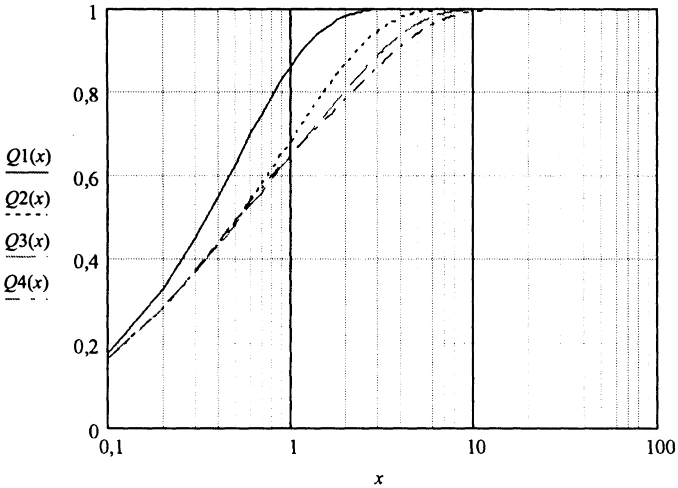

Рис. 1. Аппроксимации $Q^{(1)}(x)$, $Q^{(2)}(x)$, $Q^{(3)}(x)$, $Q^{(4)}(x)$ (которые обозначены $Q1(x)$, $Q2(x)$, $Q3(x)$, $Q4(x)$ соответственно) при $\lambda = 2$, $\mu_n = \mu_1 + (n-1)\mu$, $\mu_1 = 2$, $\mu = 0{,}5$, $N = 1$

Для рассматриваемого случая на рис. 1 показаны аппроксимации $Q^{(k)}(x) = \int\limits_0^x p_{\tau_1}^{(k)}(t)dt$, $k = 1,2,3,4$, функции распределения вероятностей $Q(x) = \int\limits_0^x p_{\tau_1}(t)dt$. Эти аппроксимации $Q^{(1)}(x)$, $Q^{(2)}(x)$, $Q^{(3)}(x)$, $Q^{(4)}(x)$ на рис. 1 обозначены $Q1(x)$, $Q2(x)$, $Q3(x)$, $Q4(x)$ соответственно.

Пример 2. Этот пример дает четыре последовательные аппроксимации для $p_{\tau_1}(t)$ в случае $\lambda = 1$ и $\mu_n = n$. Рис. 2, который показывает эти аппроксимации, также показывает аппроксимации из [1].

Используя (12), получаем первые аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(1)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(1)}(s) = \frac{1}{s+1}, \tag{58}$$

$$p_{\tau_1}^{(1)}(t) = e^{-t}. \tag{59}$$

Используя (13), получаем вторые аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(2)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(2)}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+2} = \frac{h_{12}}{s-s_{12}} + \frac{h_{22}}{s-s_{22}}, \tag{60}$$

$$p_{\tau_1}^{(2)}(t) = h_{12}e^{s_{12}t} + h_{22}e^{s_{22}t}, \tag{61}$$

$$h_{12} = 0{,}5, \qquad h_{22} = 0{,}5, \qquad s_{12} = -3{,}414213\ldots, \qquad s_{22} = -0{,}585786\ldots$$

Используя (17), получаем третьи аппроксимации $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s)$ и $p_{\tau_1}^{(3)}(t)$:

$$\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s) = \frac{s^2+6s+6}{s^3+8s^2+16s+6} = \frac{h_{13}}{s-s_{13}} + \frac{h_{23}}{s-s_{23}} + \frac{h_{33}}{s-s_{33}}, \tag{62}$$

$$p_{\tau_1}^{(3)}(t) = h_{13}e^{s_{13}t} + h_{23}e^{s_{23}t} + h_{33}e^{s_{33}t}, \tag{63}$$

$$h_{13} = 0{,}110560\ldots, \qquad h_{23} = 0{,}517742\ldots, \qquad h_{33} = 0{,}371697\ldots,$$

$$s_{13} = -5{,}086130\ldots, \qquad s_{23} = -2{,}428007\ldots, \qquad s_{33} = -0{,}485863\ldots$$

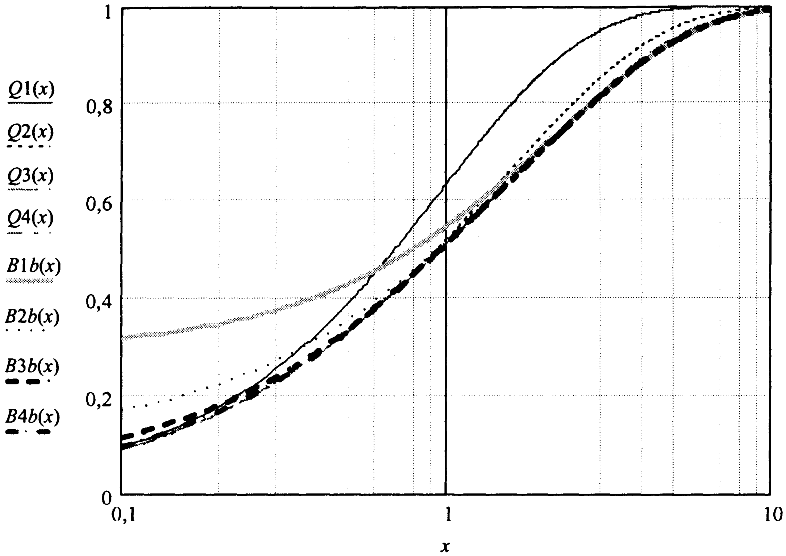

Рис. 2. Аппроксимации $Q^{(1)}(x)$, $Q^{(2)}(x)$, $Q^{(3)}(x)$, $Q^{(4)}(x)$ (которые обозначены $Q1(x)$, $Q2(x)$, $Q3(x)$, $Q4(x)$ соответственно) и аппроксимации $B^{(1)}(x)$, $B^{(2)}(x)$, $B^{(3)}(x)$, $B^{(4)}(x)$ из [1] (которые обозначены $B1b(x)$, $B2b(x)$, $B3b(x)$, $B4b(x)$ соответственно) при $\lambda = 1$, $\mu_n = n$, $N = 1$

Используя (21)–(24), получаем четвертые аппроксимации $\widetilde{p}^{(4)}_{\tau_1}(s)$ и $p^{(4)}_{\tau_1}(t)$:

$$\widetilde{p}^{(4)}_{\tau_1}(s) = \frac{s^3 + 11s^2 + 33s + 24}{s^4 + 13s^3 + 53s^2 + 74s + 24} = \frac{h_{14}}{s - s_{14}} + \frac{h_{24}}{s - s_{24}} + \frac{h_{34}}{s - s_{34}} + \frac{h_{44}}{s - s_{44}}, \tag{64}$$

$$p^{(4)}_{\tau_1}(t) = h_{14}e^{s_{14}t} + h_{24}e^{s_{24}t} + h_{34}e^{s_{34}t} + h_{44}e^{s_{44}t}, \tag{65}$$

$h_{14} = 0{,}099121\ldots$, $h_{24} = -0{,}599999\ldots$, $h_{34} = 1{,}175970\ldots$, $h_{44} = 0{,}324908\ldots$,
$s_{14} = -7{,}034042\ldots$, $s_{24} = -3{,}0\ldots$, $s_{34} = -2{,}513464\ldots$, $s_{44} = -0{,}452493\ldots$

Для рассматриваемого случая с $\lambda = 1, \mu_1 = 1$ и $N = 1$ рис. 2 показывает аппроксимации $Q^{(k)}(x) = \int\limits_0^x p^{(k)}_{\tau_1}(t)dt$, $k = 1, 2, 3, 4$, функции распределения вероятностей $Q(x) = \int\limits_0^x p_{\tau_1}(t)dt$. Аппроксимации $Q^{(1)}(x)$, $Q^{(2)}(x)$, $Q^{(3)}(x)$, $Q^{(4)}(x)$ на рис. 2 обозначены $Q1(x)$, $Q2(x)$, $Q3(x)$, $Q4(x)$ соответственно. Также рис. 2 показывает аппроксимации $B^{(1)}(x)$, $B^{(2)}(x)$, $B^{(3)}(x)$, $B^{(4)}(x)$ из [1] (они обозначены $B1b(x)$, $B2b(x)$, $B3b(x)$, $B4b(x)$ соответственно). Для $N = 1$ и $\mu_n = n$ [1]

$$B^{(i)}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{i} \frac{R_j}{p_j} e^{p_j x}, \tag{66}$$

где символ p_j обозначает корень уравнения

$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(z + j)j!} = 0 \tag{67}$$

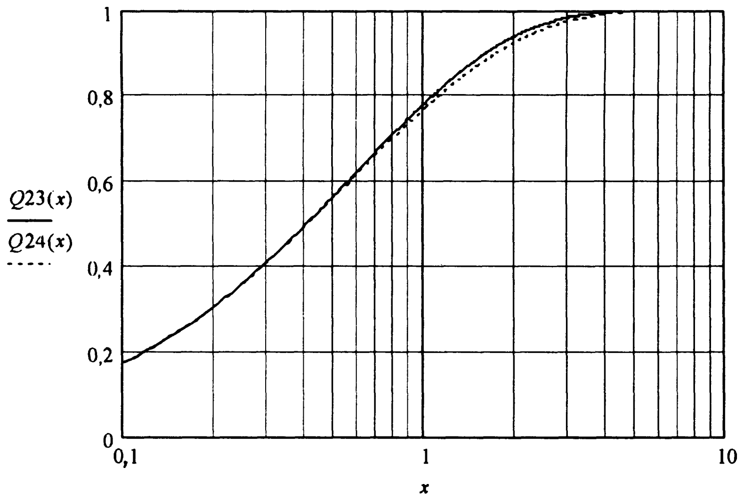

Рис. 3. Аппроксимации $Q^{(3)}(x)$, $Q^{(4)}(x)$ (которые обозначены $Q23(x)$, $Q24(x)$ соответственно) при $\lambda = 1$, $\mu_n = n$, $N = 2$

в интервале $-j < z < -j + 1$, а

$$R_j = \frac{e^{\lambda}}{\lambda \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(p_j + k)^2 k!} \right)}. \tag{68}$$

На рис. 2 аппроксимации $Q^{(i)}(x)$ показаны тонкими кривыми, а аппроксимации $B^{(i)}(x)$ – жирными кривыми. Кривые $Q^{(3)}(x), Q^{(4)}(x)$ и $B^{(4)}(x)$ на рисунке так близки, что их не различить. Следующие аппроксимации $Q^{(k)}(x)$ и $B^{(k)}(x)$, $k > 4$, и сама кривая $Q(x)$, если бы они были показаны, а также $Q^{(4)}(x)$ и $B^{(4)}(x)$ тоже неразличимы. Такое поведение кривых аппроксимаций $Q^{(k)}(x)$ и $B^{(k)}(x)$, которое показано на рис. 2, является типичным.

Пример 3. Здесь используются равенство (43) и функции $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(3)}(s)$ и $\widetilde{p}_{\tau_1}^{(4)}(s)$ из примера 2 для получения аппроксимаций $\widetilde{p}_{\tau_2}^{(3)}(s)$ и $\widetilde{p}_{\tau_2}^{(4)}(s)$ функции $\widetilde{p}_{\tau_2}(s)$ и для получения аппроксимаций $p_{\tau_2}^{(3)}(t)$ и $p_{\tau_2}^{(4)}(t)$ функции $p_{\tau_2}(t)$. Это делается опять для случая $\lambda = 1$ и $\mu_n = n$.

Имеем

$$\widetilde{p}_{\tau_2}^{(3)}(s) = \frac{s 2\mu_1 + 6\mu_1^2}{s^2 + s(\lambda + 5\mu_1) + 6\mu_1^2} = \frac{h_{13}}{s - s_{13}} + \frac{h_{23}}{s - s_{23}}, \tag{69}$$

$$p_{\tau_2}^{(3)}(t) = h_{13} e^{s_{13} t} + h_{23} e^{s_{23} t}, \tag{70}$$

$h_{13} = 1, \qquad h_{23} = 1,$

$s_{13} = -4{,}732051\ldots, \qquad s_{23} = -1{,}267949\ldots,$

$$\widetilde{p}_{\tau_2}^{(4)}(s) = \frac{s^2 2\mu_1 + s(2\lambda\mu_1 + 14\mu_1^2) + 24\mu_1^3}{s^3 + s^2(2\lambda + 9\mu_1) + s(\lambda^2 + 6\lambda\mu_1 + 26\mu_1^2) + 24\mu_1^3} = \frac{h_{14}}{s - s_{14}} + \frac{h_{24}}{s - s_{24}} + \frac{h_{34}}{s - s_{34}}, \tag{71}$$

$$p_{\tau_2}^{(4)}(t) = h_{14} e^{s_{14} t} + h_{24} e^{s_{24} t} + h_{34} e^{s_{34} t}, \tag{72}$$

$h_{14} = 0{,}261176\ldots, \quad h_{24} = 1{,}027923\ldots, \quad h_{34} = 0{,}710900\ldots,$

$s_{14} = -6{,}477352\ldots, \quad s_{24} = -3{,}448070\ldots, \quad s_{33} = -1{,}074577\ldots$

В этом случае с $\lambda = 1, \mu_1 = 1$ и $N = 2$ рис. 3 показывает аппроксимации $Q^{(k)}(x) = \int_0^x p_{\tau_2}^{(k)}(t)dt$, $k = 3, 4$, функции распределения вероятностей $Q(x) = \int_0^x p_{\tau_2}(t)dt$. Аппроксимации $Q^3(x)$, $Q^{(4)}(x)$ на рис. 3 обозначены $Q23(x)$, $Q24(x)$ соответственно.

§ 4. Нижняя граница для функции распределения

Здесь дается нижняя граница (90) (см. ниже) для $Q(T)$ при $\lambda < \mu_N$. Используя эту границу, можно проиллюстрировать близость полученных выше аппроксимаций точной величины $Q(T)$.

Для получения границы предположим снова, что система $M/M/\infty$ находится в состоянии $n = N$ в момент $t = 0$. Имеет место равенство

$$\tau'_N = \begin{cases} \eta_N^{(1)}, & \text{если } \eta_N^{(1)} \le \xi^{(1)}, \\ \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)} + \eta_N^{(2)}, & \text{если } \eta_N^{(1)} > \xi^{(1)}, \eta_N^{(2)} \le \xi^{(2)}, \\ \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)} + \xi^{(2)} + \tau_{N+1}^{(2)} + \tau_N^{(2)}, & \text{если } \eta_N^{(1)} > \xi^{(1)}, \eta_N^{(2))} > \xi^{(2)}. \end{cases} \tag{73}$$

Это равенство означает следующее.

Период занятости порядка N состоит только из интервала времени, необходимого для обслуживания первого требования, обслуживаемого в состоянии N (это время $\eta_N \equiv \eta_N^{(1)}$, так как рассматривается система $M/M/\infty$), если $\xi^{(1)}$, т.е. момент поступления первого нового требования после $t = 0$, *больше* времени обслуживания $\eta_N^{(1)}$.

Если $\xi^{(1)}$ *меньше* $\eta_N^{(1)}$, то период занятости порядка $N + 1$ начинается в момент $t = \xi^{(1)}$ и кончается в момент $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$, где $\tau_{N+1}^{(1)}$ обозначает длину этого периода занятости порядка $N + 1$. Если $\xi^{(2)}$, т.е. длина интервала времени между $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$ и моментом первого нового поступления после $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$, больше времени обслуживания $\eta_N^{(2)}$, т.е. времени, необходимого для обслуживания первого обслуживаемого требования в состоянии N, которое начинается в момент $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$, то период занятости порядка N, который начинается в момент $t = 0$, состоит из времени поступления первого нового требования после $t = 0$ (это время равно $\xi^{(1)}$) плюс длина периода занятости порядка $N + 1$, который начинается при $t = \xi^{(1)}$ (этот период имеет длину, обозначаемую $\tau_{N+1}^{(1)}$), плюс время обслуживания $\eta_N^{(2)}$.

Если $\xi^{(2)}$, т.е. длина интервала времени между $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$ и моментом первого нового поступления после $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)}$, *меньше* времени обслуживания $\eta_N^{(2)}$, то период занятости порядка N, который начинается в момент $t = 0$, состоит из времени поступления первого нового требования после $t = 0$ (это время равно $\xi^{(1)}$) плюс длина периода занятости порядка $N + 1$, который начинается при $t = \xi^{(1)}$ (этот период имеет длину, обозначенную $\tau_{N+1}^{(1)}$), плюс $\xi^{(2)}$, плюс длина периода занятости порядка $N + 1$, который начинается при $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)} + \xi^{(2)}$ (этот период имеет длину, обозначенную $\tau_N^{(2)}$), плюс длина периода занятости порядка N, который начинается при $t = \xi^{(1)} + \tau_{N+1}^{(1)} + \xi^{(2)} + \tau_{N+1}^{(2)}$ (этот период имеет длину, обозначенную $\tau_N^{(2)}$).

В системе $M/M/\infty$ имеются следующие свойства случайных величин, входящих в (73). Случайные величины $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\eta_N^{(1)}$, $\eta_N^{(2)}$, $\tau_N^{(2)}$, $\tau_{N+1}^{(1)}$ и $\tau_{N+1}^{(2)}$ являются независимыми. Плотности распределений вероятностей, одинаково распределенных $\xi^{(1)}$

и $\xi^{(2)}$, даны равенством (1). Плотности распределений вероятностей, одинаково распределенных $\eta_N^{(1)}$ и $\eta_N^{(2)}$, даны равенством (2). Случайные величины $\tau_{N+1}^{(1)}$ и $\tau_{N+2}^{(2)}$ распределены одинаково.

Равенство (73) дает

$$P(T,N) = Q_0 + Q_1 + Q_2, \tag{74}$$

где

$$Q_0 \triangleq \Pr\left\{T < \eta_N^{(1)} \le \xi^{(1)}\right\}, \tag{75}$$

$$Q_1 \triangleq \Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} > T - \xi^{(1)} - \eta_N^{(2)}, \quad \eta_N^{(1)} > \xi^{(1)}, \quad \eta_N^{(2)} \le \xi^{(2)}\right\}, \tag{76}$$

$$Q_2 \triangleq \Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} + \tau_{N+1}^{(2)} + \tau_N^{(2)} > T - \xi^{(1)} - \xi^{(2)}, \quad \eta_N^{(1)} > \xi^{(1)}, \quad \eta_N^{(2)} > \xi^{(2)}\right\}. \tag{77}$$

Для $\Pr\{T < \eta_N \le \xi\}$ имеем

$$\Pr\{T < \eta_N \le \xi\} = \frac{\mu_N}{\lambda + \mu_n} e^{-(\lambda+\mu_N)T}. \tag{78}$$

Для Q_1 имеем

$$Q_1 = \begin{cases} Q_1^{(1)}, & \text{если} \quad \xi^{(1)} + \eta_N^{(2)} \ge T, \\ Q_1^{(2)}, & \text{если} \quad \xi^{(1)} + \eta_N^{(2)} < T, \end{cases} \tag{79}$$

где

$$Q_1^{(1)} = \iint\limits_{x+y\ge T} p_\xi(x) p_{\eta_N}(y) \Pr\left\{\eta_N^{(1)} > x\right\} \Pr\left\{\xi^{(2)} > y\right\} dxdy =$$

$$= \int\limits_0^T \left[\int\limits_{T-x}^{\infty} \mu_N e^{-(\lambda+\mu_N)y} dy\right] \lambda e^{-(\lambda+\mu_N)x} dx = \frac{\lambda\mu_N T}{\lambda+\mu_N} e^{-(\lambda+\mu_N)T}. \tag{80}$$

Вероятность $\Pr\{\tau_{N+1} + \tau_N > T - x\}$, участвующая в Q_1, может быть ограничена сверху:

$$\Pr\{\tau_{N+1} + \tau_N > T - x\} \le \Pr\{\check\tau_{N+1} + \check\tau_N > T - x\}, \tag{81}$$

где $\check\tau_N$ обозначает длину периода занятости в системе $M/M/1$ с интенсивностью входного потока λ и скоростью обслуживания $\check\mu_N = \mu_N, \lambda < \check\mu_N$. Случайные величины $\check\tau_N$ и $\check\tau_{N+1}$ независимы. Причина, по которой справедливо неравенство (81), состоит в следующем. В указанной системе $M/M/1$ средняя скорость обслуживания $\check\mu_N$ не меняется в зависимости от того, сколько требований находится в очереди, и эта скорость остается равной μ_N, где N задано. В системе же $M/M/\infty$ средняя скорость обслуживания μ_N зависит от числа требований в системе (т.е. от состояния системы N) и возрастает, если это число требований возрастает, а событие "в системе остается всего $N-1$ требование" (это событие означает конец периода занятости порядка N) не наступает. Принимая это во внимание, получаем

$$Q_1^{(2)} = \iint\limits_{x+y<T} p_{\eta_N}(y)p_\xi(x)\Pr\left\{\eta_N^{(1)} > x\right\}\Pr\left\{\xi^{(2)} > y\right\}\Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} > T - x - y\right\}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^T\left[\int\limits_0^{T-x}\mu_N e^{-(\lambda+\mu_N)y}\Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} > T - x - y\right\}dy\right]\lambda e^{-(\lambda+\mu_N)x}dx \le$$

$$\le \lambda\mu_N\int\limits_0^T\left[\int\limits_x^T e^{-(\lambda+\mu_N)y}\left(\int\limits_{T-y}^\infty p_{\tilde\tau_{N+1}}(z)dz\right)dy\right]dx. \tag{82}$$

Для Q_2 имеем

$$Q_2 = \begin{cases} Q_2^{(1)}, & \text{если} \quad \xi^{(1)} + \eta_N^{(2)} \ge T, \\ Q_2^{(2)}, & \text{если} \quad \xi^{(1)} + \eta_N^{(2)} < T, \end{cases} \tag{83}$$

где

$$Q_2^{(1)} = \iint\limits_{x+y\ge T} p_\xi(x)p_\xi(y)\Pr\left\{\eta_N^{(1)} > x\right\}\Pr\left\{\eta_N^{(2)} > y\right\}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^T\left[\int\limits_{T-x}^\infty \lambda e^{-(\lambda+\mu_N)y}dy\right]\lambda e^{-(\lambda+\mu_N)x}dx = \frac{\lambda^2 T}{\lambda+\mu_N}e^{-(\lambda+\mu_N)T}, \tag{84}$$

и подобно (82)

$$Q_2^{(2)} = \iint\limits_{x+y<T} p_\xi(x)p_\xi(y)\Pr\left\{\eta_N^{(1)} > x\right\}\Pr\left\{\eta_N^{(2)} > y\right\}\Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} + \tau_{N+1}^{(2)} + \tau_N^{(2)} > T - x - y\right\}dxdy =$$

$$= \int\limits_0^T\left[\int\limits_0^{T-x}\lambda e^{-(\lambda+\mu_N)y}\Pr\left\{\tau_{N+1}^{(1)} + \tau_{N+1}^{(2)} + \tau_N^{(2)} > T - x - y\right\}dy\right]\lambda e^{-(\lambda+\mu_N)x}dx \le$$

$$\le \lambda^2\int\limits_0^T\left[\int\limits_x^T e^{-(\lambda+N\mu_1)y}\left(\int\limits_{T-y}^\infty p_{\tilde\tau_{N+1}^{(1)}+\tilde\tau_{N+1}^{(2)}+\tilde\tau_N}(z)dz\right)dy\right]dx. \tag{85}$$

Теперь нам нужно найти плотность вероятности $p_{\tilde\tau_{N+1}^{(1)}+\tilde\tau_{N+1}^{(2)}+\tilde\tau_N}(z)$. Имеем

$$p_{\tilde\tau_{N+1}^{(1)}+\tilde\tau_{N+1}^{(2)}+\tilde\tau_N}(z) = \int\limits_0^z p_{\tilde\tau_N}(x)p_{\tilde\tau_{N+1}^{(1)}+\tilde\tau_{N+1}^{(2)}}(z-x)dx, \tag{86}$$

где $p_{\tilde\tau_N}(x)$ дается равенством

$$p_{\tilde\tau_N}(x) = \frac{1}{x\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_N}}}\exp\{-(\lambda+\mu_N)x\}I_1\left[2x\sqrt{\lambda\mu_N}\right], \tag{87}$$

в котором I_1 обозначает модифицированную функцию Бесселя первого рода и первого порядка.

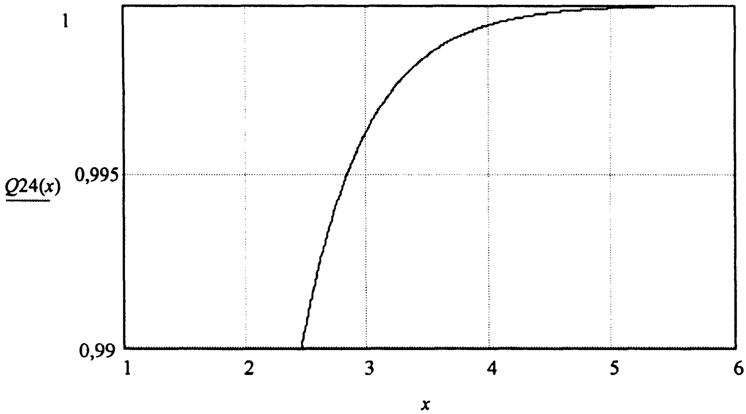

Рис. 4. Аппроксимация $Q^4(x)$ (которая обозначена $Q24(x)$) при $\lambda = 0{,}1$, $\mu_n = n$, $N = 2$

Чтобы закончить отыскание нижней границы для $Q(T)$, нам нужно использовать известное преобразование Лапласа $\widetilde{p}_{\check{\tau}_{N+1}}(s)$ функции $p_{\check{\tau}_{N+1}}(x)$:

$$\widetilde{p}_{\check{\tau}_{N+1}}(s) = \frac{2\mu_{N+1}}{\lambda + \mu_{N+1} + s + \sqrt{(\lambda + \mu_{N+1} + s)^2 - 4\lambda\mu_{N+1}}}. \tag{88}$$

Согласно (88) мы получаем следующее преобразование Лапласа $\widetilde{p}_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}}(s)$ функции $p_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}}(x)$:

$$\widetilde{p}_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}}(s) = \left[\frac{2\mu_{N+1}}{\lambda + \mu_{N+1} + s + \sqrt{(\lambda + \mu_{N+1} + s)^2 - 4\lambda\mu_{N+1}}}\right]^2. \tag{89}$$

Равенства, приведенные выше, дают следующую нижнюю границу для $Q(T)$ при $\lambda < \mu_N$:

$$\begin{aligned} Q(T) \geq 1 - \Bigg\{ & \frac{\mu_N + \lambda\mu_N T + \lambda^2 T}{\lambda + \mu_N} e^{-(\lambda+\mu_N)T} + \\ & + \lambda\mu_N \int_0^T \left[\int_x^T e^{-(\lambda+\mu_N)y} \left(\int_{T-y}^{\infty} p_{\check{\tau}_{N+1}}(z)dz\right) dy\right] dx + \\ & + \lambda^2 \int_0^T \left[\int_x^T e^{-(\lambda+\mu_N)y} \left(\int_{T-y}^{\infty} p_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}+\check{\tau}_N}(z)dz\right) dy\right] dx \Bigg\}, \end{aligned} \tag{90}$$

где $p_{\check{\tau}_N}(x)$ дается равенством (87), $p_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}+\check{\tau}_N}(x)$ дается равенством (86), а

$$p_{\check{\tau}^{(1)}_{N+1}+\check{\tau}^{(2)}_{N+1}}(x) = \frac{2\mu_{N+1}}{\lambda x} \exp\{-[\lambda + \mu_{N+1}]x\} I_2\left[2x\sqrt{\lambda\mu_{N+1}}\right], \tag{91}$$

где I_m обозначает модифицированную функцию Бесселя порядка $m \geq 0$.

Для численной иллюстрации проведем сравнение нижней границы (90) и верхней границы $Q^{(4)}(x)$ в случае $\lambda = 0{,}1$, $\mu_n = n$, $N = 2$. Для $\widetilde{p}^{(4)}_{\tau_2}(s)$ и $p^{(4)}_{\tau_2}(t)$ мы имеем выражения (71) и (72) соответственно, где

$$h_{14} = 0{,}027979\ldots,\quad h_{24} = 0{,}401334\ldots,\quad h_{34} = 1{,}570686\ldots,$$
$$s_{14} = -4{,}356135\ldots,\quad s_{24} = -3{,}018830\ldots,\quad s_{13} = -1{,}825034\ldots$$

Кривая $Q24(x)$ на рис. 4 показывает верхнюю границу $Q^{(4)}(x)$. Нижняя граница (90) не показана на этом рисунке, так как она почти та же, что и $Q^{(4)}(x)$ в первых трех значащих цифрах, дающих $Q(2,5) = 0{,}991\ldots$, $Q(3) = 0{,}996\ldots$, $Q(3,5) = 0{,}998\ldots$ и $Q(4) = 0{,}999\ldots$

В заключение отметим, что нижняя граница может быть улучшена, если вместо (73) использовать более общее равенство, например,

$$\tau'_N = \begin{cases} \eta_N^{(1)}, \text{ если } \eta_N^{(1)} \le \xi^{(1)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\xi^{(i)} + \tau_{N+1}^{(i)}) + \eta_N^{(k)}, \text{ если } \eta_N^{(j)} > \xi^{(j)}, j = 1,\ldots,k-1; \eta_N^{(k)} \le \xi^{(k)}, \\ \sum\limits_{i=1}^{k}\left(\xi^{(i)} + \tau_{N+1}^{(i)}\right) + \tau_N^{(k)}, \text{ если } \eta_N^{(j)} > \xi^{(j)}, j = 1,\ldots,k \end{cases} \tag{92}$$

при $1 < k \le K$, где $K > 0$ обозначает любое заданное число или бесконечность. Равенства (5) и (73) – частные случаи равенства (92).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guillemin F., Pinchon D.* Continued Fraction Analysis of the Duration of an Excursion in an $M/M/\infty$ System // J. Appl. Probability. 1998. V. 35. P. 165–183.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
3. *Kleinrock L.* Queueing Systems. V. 1. New York: Wiley, 1975.
4. *Takagi H.* Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation. V. 1. Amsterdam: North-Holland, 1991.
5. *Wolff W.* Stochastic Modeling and the Theory of Queues. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
6. *Tsybakov B.S.* Probability of Heavy Traffic Period in Third Generation CDMA Mobile Communication // Mobile Networks and Applications. 2000. V. 6. P. 463–470.
7. *Morrison J.A., Shepp L.A., Van Wyk C.J.* A Queueing Analysis of Hashing with Lazy Deletion // SIAM J. Comput. 1987. V. 16. № 6. P. 1155–1164.
8. *Guillemin F., Simonian A.* Transient Characteristics of an $M/M/\infty$ System // J. Appl. Probability. 1995. V. 27. P. 862–888.
9. *Guillemin F., Rubino G., Sericola B., Simonian A.* Transient Analysis of Statistical Multiplexing of Data Connections on an ATM Link // Proc. ITC'15. Washington, 1997.
10. *Preater J.* $M/M/\infty$ Transience Revisited // J. Appl. Probability. 1997. V. 34. P. 1061–1067.
11. *Guillemin F., Pinchon D.* Excursions of Birth and Death Processes, Orthogonal Polynomials, and Continued Fractions // J. Appl. Probability. 1999. V. 36. P. 752–770.
12. *Brown M., Ross S.M.* Some Results for Infinite Server Poisson Queues // J. Appl. Probability. 1969. V. 6. № 3. P. 604–611.
13. *Stadje W.* The Busy Period of the Queueing System $M/M/\infty$ // J. Appl. Probability. 1985. V. 22. № 3. P. 697–704.

14. *Siegel A.F.* Asymptotic Coverage Distributions on the Circle // Ann. Probability. 1979. V. 7. № 4. P. 651–661.
15. *Preater J.* A Perpetuity and the $M/M/\infty$ Ranked Server System // J. Appl. Probability. 1997. V. 34. P. 508–513.
16. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1968.
17. *Ismail M., Letessier J., Valent G.* Linear Birth and Death Models and Associated Laguerre and Meixner Polynomials // J. Approx. Theory. 1988. V. 55. P. 337–348.

Цыбаков Борис Соломонович
Институт проблем передачи информации РАН
Куалком, Сан Диего, США
borist@qualcomm.com

Поступила в редакцию
30.11.2004
После переработки
17.03.2005