ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 42 **2006** **Вып. 3**

УДК 621.391.1

© 2006 г. **Б.С. Цыбаков**

ИНОЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ГАУССОВСКОГО ВЕКТОРНОГО КАНАЛА

Рассматривается гауссовский векторный канал с многими входами и выходами, дискретным временем и памятью. Задача состоит в нахождении пропускной способности такого канала. Известно, что пропускная способность гауссовских векторных каналов с памятью была описана в [1]. В настоящей статье дается иной подход к нахождению пропускной способности,использующий другое ее определение. Для канала с $n = 2$ входами и выходами получено выражение для пропускной способности, отличное от данного в [1]. В настоящей статье показано какова должна быть зависимость компонент входных сигналов для достижения пропускной способности. Многомерная интерпретация с "наливанием воды" остается в силе для оптимального распределения мощности векторного входного сигнала, но не работает при описании зависимостей между компонентами на входе. В случае канала с $n \geqslant 3$ входами и выходами получена нижняя граница для пропускной способности.

§ 1. Введение

В статье рассматривается гауссовский векторный канал с дискретным временем и памятью. Дается выражение для пропускной способности такого канала, имеющего два входа и два выхода, а также нижняя граница для пропускной способности канала с произвольным числом входов и выходов. Пропускная способность гауссовского векторного канала с памятью ранее была найдена в [1]; здесь она обозначается $\widetilde{C}$. Метод нахождения пропускной способности в [1] состоял в доказательстве того, что передача с малой вероятностью ошибки возможна тогда и только тогда, когда скорость передачи информации меньше пропускной способности $\widetilde{C}$. В настоящей статье дается иной подход к нахождению пропускной способности, обозначенной здесь через C, которая ищется как максимум взаимной скорости передачи информации между входом (удовлетворяющим данному ограничению на мощность) и выходом. Мы получаем другое выражение для пропускной способности, отличное от приведенного в [1].

Введем некоторые обозначения. Рассматривается гауссовский канал с памятью

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t) \tag{1}$$

и ограничением мощности

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\xi}'(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t)] \leqslant P, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\xi}(t)$, $t = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$, – векторный входной сигнал с n компонентами,

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}'(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)];$$

P – заданная мощность векторного входного сигнала $\boldsymbol{\xi}(t)$; $\boldsymbol{\zeta}(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, – гауссовский независимый от $\boldsymbol{\xi}(t)$ векторный аддитивный шум, который является векторным стационарным процессом с n зависимыми компонентами (зависимость существует по времени и между компонентами в тот же самый и различные моменты времени),

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_n(t) \end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{\zeta}(t)$ имеет нулевое среднее значение (т.е. $\mathbf{E}\,\boldsymbol{\zeta}(t) = [\mathbf{E}\,\zeta_1(t), \dots, \mathbf{E}\,\zeta_n(t)]' = [0, \dots, 0]'$) и заданную матрицу спектральных плотностей $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda) = \left[f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,\dots,n}$; $\boldsymbol{\eta}(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, – векторный выходной сигнал с n компонентами

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{bmatrix}.$$

Если канал (1) является гауссовским и невекторным, т.е. если $n = 1$ как канал 1×1, то, как хорошо известно [2], его пропускная способность C достигается на гауссовской паре $\bigl(\xi(t), \eta(t)\bigr)$ и

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log\left(1 + \frac{f_{\xi\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}\right) d\lambda,$$

где log – натуральный логарифм,

$$f_{\xi\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{cases} K - f_{\zeta\zeta}(\lambda), & \text{если } K - f_{\zeta\zeta}(\lambda) > 0, \\ 0, & \text{если } K - f_{\zeta\zeta}(\lambda) \leqslant 0, \end{cases}$$

а постоянная K является решением уравнения

$$\pi^{-1} \int_0^\pi \max\{K - f_{\zeta\zeta}(\lambda), 0\}\, d\lambda = P. \tag{3}$$

Для того чтобы прокомментировать стоящее выше выражение для $f_{\xi\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda)$, отметим, что если решение $f_{\xi\xi}(\lambda)$ уравнения Лагранжа

$$\partial\left[\log\left(1 + \frac{f_{\xi\xi}(\lambda)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}\right) + c f_{\xi\xi}(\lambda)\right] \Big/ \partial f_{\xi\xi}(\lambda) = 0$$

с константой $K = -c^{-1}$, удовлетворяющей (3), находится вне λ-области (т.е. существует такое λ, что решение $f_{\xi\xi}(\lambda) < 0$), то оптимальная спектральная плотность не удовлетворяет уравнению Лагранжа с таким K и при любом заданном P представляется данным выше выражением для $f_{\xi\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda)$. При заданном λ оптимальная спектральная плотность есть $K - f_{\zeta\zeta}(\lambda)$, только если решение уравнения Лагранжа неотрицательно для этого λ.

Равенство для $f_{\xi\xi}^{\text{opt}}(\lambda)$ имеет хорошо известную интерпретацию с наливанием воды.

Пропускная способность $(n \times n)$-канала (1), (2) была дана в [1] как

$$\widetilde{C} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \max \left(\log_2 \frac{K}{\lambda_j(\lambda)}, 0 \right) d\lambda, \tag{4}$$

где K такое, что

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \max \left(K - \lambda_j(\lambda), 0 \right) d\lambda = P, \tag{5}$$

и $\lambda_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, s$, – собственные значения матрицы $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda)$.

Результат (4), (5) представлен в [1] в виде теоремы 1, утверждающей, что существует код, который при достаточно большой длине имеет скорость, произвольно близкую к $\widetilde{C}$. В настоящей статье пропускная способность C выводится путем максимизации полученного в [3] выражения для скорости передачи векторного сигнала.

Настоящая статья организована следующим образом. В §2 (теорема 1) дается общее выражение для пропускной способности в случае $n = 2$. Теорема показывает, что входные сигналы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ должны быть коррелированными (зависимыми), чтобы дать пропускную способность канала. Другими словами, скорость передачи информации при некоррелированных $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в общем случае ниже, чем пропускная способность канала. В §3 дается применение теоремы 1 в трех частных векторных каналах; там же содержится гипотеза о том, что $C = \widetilde{C}$ в каждом случае. В §4 (теорема 2) дается нижняя граница для пропускной способности векторного канала в случае произвольного $n \geqslant 3$; она иллюстрируется случаем $n = 3$. Доказательство теоремы 2, которое не включено в статью, отличается в некотором смысле от доказательства, использованного в §2 в случае $n = 2$. В случае $n \geqslant 3$ в уравнениях Лагранжа используется полярное представление компонент входного сигнала для того, чтобы получить независимые "переменные" в этих уравнениях. В случае $n = 2$ такое полярное представление не является необходимым. Уравнения Лагранжа в случае $n = 2$ могут быть решены прямым способом, если не требовать, чтобы решение было неотрицательным. Однако даже прямое решение уравнений Лагранжа в случае $n \geqslant 3$ провести не просто из-за большого числа уравнений (например, если $n = 3$, число уравнений равно 9) и их нелинейности. Поэтому в случае $n \geqslant 3$ уравнения Лагранжа не решаются, а их решение угадывается. Угаданное решение приводится в теореме 2. Не приведенное здесь доказательство теоремы 2 состоит в проверке того, что угаданное решение на самом деле удовлетворяет уравнениям Лагранжа. Такое доказательство теоремы не содержит доказательства единственности угаданного решения или того, что оно дает максимальную среди всех возможных решений скорость передачи. Поэтому полученный в теореме 2 результат представляет нижнюю границу пропускной способности. В случае $n = 2$ полученная нижняя граница на самом деле является пропускной способностью, так как она совпадает с результатом теоремы 1. В §5 показано как изменяются результаты для пропускной способности гауссовского векторного канала (1) с мощностным ограничением (2) при переходе к каналу с фильтром. Канал с фильтром также был рассмотрен в [1].

§ 2. Пропускная способность канала с двумя входными и двумя выходными компонентами сигнала

Здесь найдена пропускная способность гауссовского векторного канала (1) с мощностным ограничением (2) в случае $n = 2$. Результат представляет

Теорема 1. *Для канала (1) с мощностным ограничением (2), $n = 2$, с заданной матрицей спектральных плотностей шума $M_{\zeta}(\lambda) = \left[f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,2}$, $\det M_{\zeta}(\lambda) \neq 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, пропускная способность C дается параметрически равенствами*

$$C = \max_{P_1 \geqslant 0,\, P_2 \geqslant 0,\, P_1 + P_2 = P} C(P_1, P_2), \tag{6}$$

$$C(P_1, P_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\Lambda_i} \log \frac{\det M_{\eta}^{(i)}(\lambda)}{\det M_{\zeta}(\lambda)} d\lambda, \tag{7}$$

где

$$\det M_{\eta}^{(1)}(\lambda) = K_1 K_2, \tag{8}$$

$$\det M_{\eta}^{(2)}(\lambda) = K_1 f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) - |f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda)|^2, \tag{9}$$

$$\det M_{\eta}^{(3)}(\lambda) = K_2 f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) - |f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda)|^2, \tag{10}$$

$$\Lambda_1 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda),\ K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)\}, \tag{11}$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda),\ K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)\}, \tag{12}$$

$$\Lambda_3 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda),\ K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)\}, \tag{13}$$

и K_i, $i = 1, 2$, являются постоянными, удовлетворяющими уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \pi^{-1} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} [K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)] d\lambda = P_1, \\ \pi^{-1} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_3} [K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)] d\lambda = P_2. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Матрица спектральных плотностей оптимального векторного сигнала на входе

$$M_{\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{\xi_1\xi_1}^{\mathrm{opt}}(\lambda) & f_{\xi_1\xi_2}^{\mathrm{opt}}(\lambda) \\ f_{\xi_2\xi_1}^{\mathrm{opt}}(\lambda) & f_{\xi_2\xi_2}^{\mathrm{opt}}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{15}$$

является следующей:

$$M_{\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & -f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) \\ -f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda_1, \tag{16}$$

$$M_{\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda_2, \tag{17}$$

$$M_{\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda_3, \tag{18}$$

$$M_{\xi}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda_4 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)\}. \tag{19}$$

Теорема показывает (см. (15)), что входные сигналы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ должны быть коррелированными (зависимыми) для того, чтобы дать пропускную способность гауссовского векторного канала.

Что касается функций $f^{\text{opt}}_{\xi_i\xi_i}(\lambda)$, $i = 1, 2$, представленных равенствами (17) и (18), то они имеют двумерную интерпретацию с наливанием воды. Однако вся оптимальная матрица $\boldsymbol{M}^{\text{opt}}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda)$ (см. (15)) не имеет интерпретацию с наливанием воды для каждого из ее элементов.

В теоремах 1, 2 и в доказательстве теоремы 1 все логарифмы натуральные. Для того чтобы получить C с $\log_2$, нужно умножить правую часть равенства (7) на $\log_2 e$.

Доказательство. Сначала здесь рассматривается гауссовский канал (1), (2) с n входами и n выходами.

Для такого гауссовского канала (1) с мощностным ограничением (2) и данной матрицей спектральных плотностей шума $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda) \triangleq \left[f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,\ldots,n}$, имеющей $\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda) \neq 0$, пропускная способность C дается параметрически в виде

$$C = \max_{P_1 \geqslant 0, \ldots, P_n \geqslant 0, P_1 + \ldots + P_n = P} C(P_1, \ldots, P_n), \tag{20}$$

$$C(P_1, \ldots, P_n) = \max \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \log \left\{ \frac{\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)}{\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda)} \right\} d\lambda, \tag{21}$$

где

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) \triangleq \left[f_{\xi_i\xi_j}(\lambda) + f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,\ldots,n} \tag{22}$$

– матрица спектральных плотностей векторного выходного сигнала, а максимум в (21) берется по спектральным плотностям векторного гауссовского входного сигнала $\boldsymbol{\xi}(t)$ (либо по матрице спектральных плотностей векторного входного сигнала $\boldsymbol{\xi}(t)$) с ограничением

$$\pi^{-1} \int\limits_0^\pi f_{\xi_i\xi_i}(\lambda)\, d\lambda \leqslant P_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Хорошо известно (см. [4]), что пропускная способность C гауссовского канала достигается на векторном входном сигнале $\boldsymbol{\xi}(t)$, который является гауссовским. Для гауссовской пары $(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t))$ векторных входного и выходного сигналов хорошо известно следующее выражение для скорости передачи информации $L_{\xi\eta}$ [3]:

$$L_{\xi\eta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \log \left\{ \frac{\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)}{\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\zeta}}(\lambda)} \right\} d\lambda. \tag{24}$$

Результат (20) получается после максимизации $L_{\xi\eta}$ по спектральным плотностям векторного входного сигнала $\boldsymbol{\xi}(t)$ при мощностном ограничении (2). Теперь для доказательства теоремы нужно провести максимизацию в (21) в случае $n = 2$.

Для рассматриваемого канала с $n = 2$ матрица спектральных плотностей векторного выходного сигнала $\boldsymbol{\eta}(t)$ есть

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) \triangleq \left[f_{\xi_i\xi_j}(\lambda) + f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,2} = \begin{bmatrix} f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) \\ f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Функции $f_{\xi_i\xi_i}(\lambda)$, $i = 1, 2$, которые участвуют в $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)$, являются действительными и неотрицательными, как спектральные плотности. Однако функции $f_{\xi_i\xi_j}(\lambda)$, $i \neq j$, которые также присутствуют в $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)$, в общем случае не являются действительными, а являются комплексными.

Представим $\det \boldsymbol{M}_\eta(\lambda)$ как функцию $f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)$, $f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)$, $\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)$, $\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)$, $f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)$, $f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)$, $\operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)$, $\operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)$. Чтобы получить нужное нам представление, используем хорошо известные общие равенства

$$f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) = f_{\xi_2\xi_1}(\lambda), \quad f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = \operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) + i \operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(\lambda),$$
$$f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = f^*_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) = \operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) - i \operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)$$

(где f^* обозначает комплексное сопряжение функции f), их следствия

$$\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = \operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) = \operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda),$$
$$\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = -\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) = -\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda),$$

а также равенства для функций, имеющих индексы ζ_1, ζ_2 вместо индексов ξ_1, ξ_2.

Мы получаем

$$\begin{aligned} &f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = f^*_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) = \\ &= [\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) - i \operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)]\,[\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda) + i \operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)] = \\ &= (\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))^2 + (\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))^2, \end{aligned} \tag{26}$$

и аналогично

$$f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = (\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda))^2 + (\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda))^2, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) = (\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)) + i(\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)) - \\ &- i(\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)) + (\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = (\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda) - i(\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)) + \\ &+ i(\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)) + (\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda))(\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)). \end{aligned} \tag{29}$$

Используя равенства (26)–(29), получим

$$\begin{aligned} &(f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda))\,(f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)) = \\ &= f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) + f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = \\ &= [\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)]^2 + 2\,[\operatorname{Re} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)]\,[\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)] + \\ &+ 2\,[\operatorname{Im} f_{\xi_1\xi_2}(-\lambda)]\,[\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)] + [\operatorname{Re} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\zeta_1\zeta_2}(-\lambda)]^2 = \\ &= [\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]^2 + 2\,[\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]\,[\operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] + \\ &+ 2\,[\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]\,[\operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] + [\operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)]^2. \end{aligned} \tag{30}$$

Используя равенства (25), (30), получим

$$\begin{aligned} &\det \boldsymbol{M}_\eta(\lambda) = [f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)][f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)] - \\ &- \Big\{ [\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]^2 + 2\,[\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]\,[\operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] + \\ &+ 2\,[\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)]\,[\operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] + [\operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)]^2 + [\operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)]^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Чтобы найти пропускную способность, рассмотрим

$$C(P_1, P_2) \triangleq \max \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \log \left\{ \frac{\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda)}{\det \left[f_{\zeta_i \zeta_j}(\lambda) \right]_{i,j=1,2}} \right\} d\lambda =$$

$$= \max \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \log \det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) - \log \det \left[f_{\zeta_i \zeta_j}(\lambda) \right]_{i,j=1,2} \right\} d\lambda, \tag{32}$$

где максимум в (32) берется по $f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)$, $f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)$, $\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)$, $\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)$ с ограничением

$$\pi^{-1} \int_0^{\pi} f_{\xi_i\xi_i}(\lambda) d\lambda \leqslant P_i, \quad i = 1, 2. \tag{33}$$

Используя функцию Лагранжа

$$L(\lambda) = \log \det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) + c_1 f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + c_2 f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) \tag{34}$$

(где c_1 и c_2 – постоянные Лагранжа), получим уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)} = (\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda))^{-1} [f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)] + c_1 = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)} = (\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda))^{-1} [f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)] + c_2 = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)} = (\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda))^{-1} [-2 \operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) - 2 \operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)} = (\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda))^{-1} [-2 \operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) - 2 \operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)] = 0 \tag{38}$$

или, соответственно,

$$f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) + c_1 \det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) = 0, \tag{39}$$

$$f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) + c_2 \det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) = 0, \tag{40}$$

$$\operatorname{Re} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + \operatorname{Re} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = 0, \tag{41}$$

$$\operatorname{Im} f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + \operatorname{Im} f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = 0. \tag{42}$$

Равенства (41) и (42) дают

$$f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) = 0. \tag{43}$$

Принимая во внимание (43), получим

$$(f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda))\,(f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda)) = 0, \tag{44}$$

и следовательно,

$$\det \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\eta}}(\lambda) = [f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)][f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)]. \tag{45}$$

Из (39) и (45) следует, что

$$1 + c_1 [f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) + f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)] = 0. \tag{46}$$

Аналогично, из (40) и (45) следует, что

$$1 + c_2[f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) + f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)] = 0. \tag{47}$$

Таким образом, если при заданном λ имеем

$$K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) > 0 \quad \text{и} \quad K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) > 0,$$

то из (46) и (47) получаем

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), \tag{48}$$

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_2}(\lambda) = K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), \tag{49}$$

где для заданного λ пара $(f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda), f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_2}(\lambda))$ обозначает пару $(f_{\xi_1\xi_1}(\lambda), f_{\xi_2\xi_2}(\lambda))$, при которой достигается максимум в (32), а $K_1 = -c_1^{-1}$, $K_2 = -c_2^{-1}$ являются постоянными, которые будут найдены ниже (см. рассуждения после формулы (63)).

Итак, при заданных P_1 и P_2 получаем следующее.

Если для заданного λ

$$K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) > 0, \quad i = 1, 2, \tag{50}$$

то для этого же λ справедливы (48), (49), и согласно (43)

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = -f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda), \tag{51}$$

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = -f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda). \tag{52}$$

Замечание 1. Заметим, что если $f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = 0$ при некотором λ, то $f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = 0$ при том же λ.

Это замечание следует из возможности представить $\xi_2(t)$ как

$$\xi_2(t) = \boldsymbol{B}\xi_1(t) + \theta(t), \tag{53}$$

где $\boldsymbol{B}$ – линейный фильтр, а $\theta(t)$ – гауссовский стационарный процесс, который не зависит от гауссовского стационарного процесса $\xi_1(t)$. Для процессов, связанных с (53), имеем

$$f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = B(\lambda) f_{\xi_1\xi_1}(\lambda), \tag{54}$$

где $B(\lambda)$ – спектральная характеристика фильтра $\boldsymbol{B}$. Если $f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = 0$ при некотором λ, то (54) дает $f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = 0$ при том же λ.

Замечание 2. Аналогично, если $f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) = 0$ при некотором λ, то $f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = 0$ при том же λ.

Равенство (54) также показывает, что при заданной $f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)$ функция $f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)$ может быть сделана любой наперед заданной с помощью подходящего выбора $B(\lambda)$.

Аналогично случаю $n = 1$, если решение $f_{\xi\xi}(\lambda) = (f_{\xi_1\xi_1}(\lambda), f_{\xi_2\xi_2}(\lambda))$ системы (35)–(38) с константами K_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющими (14) (или (33)), находится вне λ-области (т.е. если имеется такое λ, для которого решение $f_{\xi_i\xi_i}(\lambda) < 0$, по крайней мере, при одном i), то оптимальная спектральная плотность $f^{\mathrm{opt}}_{\xi\xi}(\lambda)$ не удовлетворяет уравнениям Лагранжа (35)–(38) с K_i, $i = 1, 2$, удовлетворяющими (14) (или (33)), и при любых заданных P_i, $i = 1, 2$, представляется следующими утверждениями.

Если для заданного λ

$$K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) > 0, \quad K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \leqslant 0, \tag{55}$$

то для этого же λ

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), \quad f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_2}(\lambda) = 0, \tag{56}$$

и замечание 2 с учетом равенства $f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = f^*_{\xi_1\xi_2}(\lambda)$ дает

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = 0. \tag{57}$$

Если для заданного λ

$$K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) \leqslant 0, \quad K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) > 0, \tag{58}$$

то для этого же λ (так же, как и в (55)–(57))

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = 0, \quad f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_2}(\lambda) = K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), \tag{59}$$

и замечание 1 дает

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = 0. \tag{60}$$

Если же для заданного λ

$$K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) \leqslant 0, \quad K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \leqslant 0, \tag{61}$$

то для этого же λ

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_1}(\lambda) = 0, \quad f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_2}(\lambda) = 0 \tag{62}$$

и

$$f^{\mathrm{opt}}_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = f^{\mathrm{opt}}_{\xi_2\xi_1}(\lambda) = 0. \tag{63}$$

Теперь дадим постоянные K_i, $i = 1, 2$, участвующие в (48), (49), (55), (56), (58) и (59). При заданных i и K_i существует множество $\Delta^{(i)}(K_i)$ величин λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, для которых $K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) \geqslant 0$ ($\Delta^{(i)}(K_i)$ может быть нулевым множеством). Множество $\Delta^{(i)}(K_i)$ уменьшается или не увеличивается, если K_i уменьшается. Множество $\Delta^{(i)}(K_i)$ увеличивается или не уменьшается, если K_i увеличивается. Значения K_i, $i = 1, 2$, дающие пропускную способность C, должны быть выбраны из множества пар (K_1, K_2), для которых $P_1 \geqslant 0$, $P_2 \geqslant 0$, $P_1 + P_2 = P$, где

$$P_i \triangleq \pi^{-1} \int\limits_{\Delta^{(i)}(K_i)} [K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda)]d\lambda, \quad i = 1, 2.$$

Интегралы здесь равны соответствующим интегралам в (14).

Соотношения (50)–(52) и (55)–(63) доказывают (15)–(19).

Соотношения (48)–(52) и (55)–(63) показывают, что

$$
M_{\eta}^{\mathrm{opt}}(\lambda) = \left[f_{\xi_i\xi_j}^{\mathrm{opt}}(\lambda) + f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)\right]_{i,j=1,2} =
$$

$$
= \begin{cases} M_{\eta}^{(1)}(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} & \text{при } \lambda, \text{ для которых справедливо (50)}, \\ M_{\eta}^{(2)}(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} K_1 & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \end{bmatrix} & \text{при } \lambda, \text{ для которых справедливо (55)}, \\ M_{\eta}^{(3)}(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 \end{bmatrix} & \text{при } \lambda, \text{ для которых справедливо (58)}, \\ M_{\eta}^{(4)}(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \end{bmatrix} & \text{при } \lambda, \text{ для которых справедливо (61)}. \end{cases} \tag{64}
$$

Определители $\det M_{\eta}^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, даются равенствами (8)–(10), а

$$
\det M_{\eta}^{(4)}(\lambda) = f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) - |f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda)|^2, \tag{65}
$$

где K_i, $i = 1, 2$, – постоянные, удовлетворяющие (14).

Равенства (32) и (64), (65) доказывают (7). ▲

§ 3. Три частных случая

Применим теорему 1 к трем частным случаям.

Случай 1. Это случай $f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) > 0$ и независимых компонент шума, т.е. $f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) = 0$. В этом случае имеем

$$
\begin{aligned}
&\det[f_{\zeta_i\zeta_j}]_{i,j=1,2} = f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), \\
&\det M_{\eta}^{(1)}(\lambda) = K_1 K_2, \\
&\det M_{\eta}^{(2)}(\lambda) = K_1 f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), \\
&\det M_{\eta}^{(3)}(\lambda) = K_2 f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda).
\end{aligned}
$$

При этом пропускная способность дается формулой (6), где

$$
C(P_1, P_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} \log \frac{K_1}{f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} \log \frac{K_2}{f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)} d\lambda. \tag{66}
$$

Если в случае *независимых* компонент шума положить $P_2 = 0$ и вместо (6) рассматривать $C_1 = C(P, 0)$, то получим пустое множество $\Lambda_1 \cup \Lambda_3$ и пропускную способность C_1, которая совпадает с пропускной способностью одномерного гауссовского канала $\eta_1(t) = \xi_1(t) + \zeta_1(t)$, имеющего ограничение $\mathbf{E}\xi_1^2(t) \leqslant P$.

Если в случае *зависимых* компонент шума положить $P_2 = 0$ и вместо (6) рассматривать $C_1 = C(P, 0)$, то получим случай (1×2)-канала, т.е. канал с одним входом $\xi_1^{(t)}$ и двумя выходами $(\eta_1(t), \eta_2(t))$.

Случай полностью зависимых компонент шума, т.е. $\zeta_1(t) = \zeta_2(t)$, не покрывается теоремой 1, так как в этом случае условие $\det M_{\zeta}(\lambda) \neq 0$ не выполняется. Тем не менее легко заметить, что в этом случае $C = \infty$, так как приемник знает точные значения шума $\zeta_2(t)$ и может вычесть его из $\eta_1(t) = \xi_1(t) + \zeta_1(t)$, чтобы получить свободный от шума входной сигнал $\xi_1(t)$.

Случай 2. Здесь рассматривается случай сильно зашумленной второй компоненты выходного сигнала (мы запишем этот случай как $f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)=\infty$, $|f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda)|^2/f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) = 0$). В этом случае неравенство $K_2 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)$, участвующее в (11) и (13), не удовлетворяется. Таким образом, оптимальные мощности $P_1^{\text{opt}} = P$, $P_2^{\text{opt}} = 0$ и пропускная способность та же, что и в хорошо известном одномерном случае $n = 1$:

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log\left\{1 + \frac{f_{\xi_1\xi_1}^{\text{opt}}(\lambda)}{f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)}\right\} d\lambda. \tag{67}$$

Пропускная способность (67) также относится и к (2×1)-каналу, т.е. к каналу с двумя входами $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ и одним выходом $\eta_1(t)$. Так как $\xi_2(t)$ идет только на второй выход, а второй выход в (2×1)-канале не существует, то оптимальная мощность P_2^{opt} равна нулю. Таким образом, это дает пропускную способность (67) для (2×1)-канала.

Случай 3. Найдем C и $\widetilde{C}$ численно в случае (2×2)-канала (1), (2) с $f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) = 2$, $f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) = 2\lambda$, $f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) = 0$, $P = 5$. Получаем $P_1^{\text{opt}} = 3{,}0059$, $P_2^{\text{opt}} = 1{,}9941$, $C = \widetilde{C} = 1{,}2365\ldots$ Гипотеза состоит в том, что $C = \widetilde{C}$ в каждом случае.

§ 4. Нижняя граница для пропускной способности канала с n входными и n выходными компонентами сигнала

Нижнюю границу для пропускной способности гауссовского канала в общем случае при числе n входов и n выходов представляет

Теорема 2. *Пусть канал (1) с мощностным ограничением (2) имеет заданную матрицу спектральных плотностей шума $M_\zeta(\lambda) = [f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)]_{i,j=1,\ldots,n}$ с $\det M_\zeta(\lambda) \neq 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Пусть матрица $M_\eta^{(\bar{\imath}_m,\bar{\jmath}_{n-m})}(\lambda) \triangleq M_\eta^{(i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_{n-m})}(\lambda)$, $\bar{\imath}_m \triangleq (i_1,\ldots,i_m)$, $\bar{\jmath}_{n-m} \triangleq (j_1,\ldots,j_{n-m})$, определяется следующим образом. Если для заданного λ имеются m неравенств $K_{i_1} \leqslant f_{\zeta_{i_1}\zeta_{i_1}}(\lambda),\ldots,K_{i_m} \leqslant f_{\zeta_{i_m}\zeta_{i_m}}(\lambda)$, где K_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, – постоянные, которые определяются ниже, $i_1,\ldots,i_m$ – зависящие от λ различные числа, принадлежащие множеству $\{1,\ldots,n\}$, а для всех остальных чисел $j_1,\ldots,j_{n-m}$ из того же множества $\{1,\ldots,n\}$ справедливо*

$$K_{j_1} > f_{\zeta_{j_1}\zeta_{j_1}}(\lambda),\ldots,K_{j_{n-m}} > f_{\zeta_{j_{n-m}}\zeta_{j_{n-m}}}(\lambda),$$

то для этого λ матрица $M_\eta^{(\bar{\imath}_m,\bar{\jmath}_{n-m})}(\lambda)$ является такой, что ее

i-я строка есть $[f_{\zeta_i\zeta_1}(\lambda)\ldots f_{\zeta_i\zeta_n}(\lambda)]$, если $i \in \{i_1,\ldots,i_m\}$,

i-й столбец есть $[f_{\zeta_1\zeta_i}(\lambda)\ldots f_{\zeta_n\zeta_i}]'$, если $i \in \{i_1,\ldots,i_m\}$,

j-я строка имеет K_j в качестве диагонального элемента матрицы $M_\eta^{(\bar{\imath}_m,\bar{\jmath}_{n-m})}(\lambda)$, $j \in \{j_1,\ldots,j_{n-m}\}$,

все остальные элементы матрицы $M_\eta^{(\bar{\imath}_m,\bar{\jmath}_{n-m})}(\lambda)$ равны 0.

При каждых заданных $\bar{\imath}_m$ и $\bar{\jmath}_{n-m}$ пусть

$$\Lambda(\bar{\imath}_m,\bar{\jmath}_{n-m}) \triangleq \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_{i_1} \leqslant f_{\zeta_{i_1}\zeta_{i_1}}(\lambda),\ \ldots,\ K_{i_m} \leqslant f_{\zeta_{i_m}\zeta_{i_m}}(\lambda),$$
$$K_{j_1} > f_{\zeta_{j_1}\zeta_{j_1}}(\lambda),\ \ldots,\ K_{j_{n-m}} > f_{\zeta_{j_{n-m}}\zeta_{j_{n-m}}}(\lambda)\},$$

а в крайних случаях $m = 0$ и $m = n$ пусть

$$\Lambda(i_0, \jmath_n) \triangleq \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_{j_1} > f_{\zeta_{j_1}\zeta_{j_1}}(\lambda), \dots, K_{j_n} > f_{\zeta_{j_n}\zeta_{j_n}}(\lambda)\},$$
$$\Lambda(\imath_n, j_0) \triangleq \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_{i_1} \leqslant f_{\zeta_{i_1}\zeta_{i_1}}(\lambda), \dots, K_{i_n} \leqslant f_{\zeta_{i_n}\zeta_{i_n}}(\lambda)\}.$$

Здесь K_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, – постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\pi^{-1} \int\limits_{\Lambda(1)} [K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)]d\lambda = P_1, \dots, \pi^{-1} \int\limits_{\Lambda(n)} [K_n - f_{\zeta_n\zeta_n}(\lambda)]d\lambda = P_n, \tag{68}$$

где $\Lambda(i)$ – объединение таких $\Lambda(\imath_m, \jmath_{n-m})$, в определение которых включено неравенство $K_i > f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda)$.

Нижняя граница для пропускной способности C дается параметрически как

$$C \geqslant \max_{P_1 \geqslant 0, \dots, P_n \geqslant 0,\, P_1 + \dots + P_n = P} C(P_1, \dots, P_n), \tag{69}$$

$$C(P_1, \dots, P_n) = \frac{1}{2\pi} \sum \int\limits_{\Lambda(\imath_m, \jmath_{n-m})} \log \frac{\det \boldsymbol{M}_\eta^{(\imath_m, \jmath_{n-m})}(\lambda)}{\det \boldsymbol{M}_\zeta(\lambda)} d\lambda, \tag{70}$$

где сумма берется по всем различным парам $(\imath_m, \jmath_{n-m})$, $(\imath_m, \jmath_{n-m}) \triangleq (i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{n-m})$, включая крайнюю пару $(\imath_n, \jmath_{n-n}) \triangleq (i_1, \dots, i_n)$.

В матрице спектральных плотностей экстремального векторного входного сигнала $\boldsymbol{M}_\xi(\lambda) = [f_{\xi_i\xi_j}(\lambda)]_{i,j=1,\dots,n}$ подматрица, состоящая из строк и столбцов $i_1, \dots$ $\dots, i_m$ (эти номера зависят от λ), равна нулю. Оставшаяся подматрица в $\boldsymbol{M}_\xi(\lambda)$ (она состоит из строк и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_{n-m}$) имеет

$$f_{\xi_j\xi_j}(\lambda) = K_j - f_{\zeta_j\zeta_j}(\lambda) > 0, \quad j \in \{j_1, \dots, j_{n-m}\}, \tag{71}$$
$$f_{\xi_j\xi_k}(\lambda) = -f_{\zeta_j\zeta_k}(\lambda), \quad j \neq k, \quad j, k \in \{j_1, \dots, j_{n-m}\}. \tag{72}$$

В качестве иллюстрации распишем теорему 2 на случай $n = 3$.

А именно, пусть канал (1) с мощностным ограничением (2) имеет $n = 3$ и заданную матрицу спектральных плотностей шума $\boldsymbol{M}_\zeta(\lambda) = [f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)]_{i,j=1,2,3}$ с $\det \boldsymbol{M}_\zeta(\lambda) \neq 0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Нижняя граница для пропускной способности C дается параметрически как

$$C \geqslant \max_{P_1 \geqslant 0,\, P_2 \geqslant 0,\, P_3 \geqslant 0,\, P_1 + P_2 + P_3 = P} C(P_1, P_2, P_3), \tag{73}$$

$$C(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{7} \int\limits_{\Lambda_i} \log \frac{\det \boldsymbol{M}_\eta^{(i)}(\lambda)}{\det \boldsymbol{M}_\zeta(\lambda)} d\lambda, \tag{74}$$

где

$$M_\eta^{(1)}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}, \quad \text{если } K_i - f_{\zeta_i,\zeta_i}(\lambda) > 0, \ i = 1,2,3, \tag{75}$$

$$M_\eta^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ 0 & K_2 & f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) > 0, \ i = 1,2, \ K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \leqslant 0, \tag{76}$$

$$M_\eta^{(3)}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & 0 \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ 0 & f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & K_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) > 0, \ i = 1,3, \ K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) \leqslant 0, \tag{77}$$

$$M_\eta^{(4)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 & 0 \\ f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & 0 & K_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) > 0, \ i = 2,3, \ K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) \leqslant 0, \tag{78}$$

$$M_\eta^{(5)}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) \leqslant 0, \ i = 2,3, \ K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) > 0, \tag{79}$$

$$M_\eta^{(6)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 & f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) \leqslant 0, \ i = 1,3, \ K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) > 0, \tag{80}$$

$$M_\eta^{(7)}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & K_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{если } K_i - f_{\zeta_i\zeta_i}(\lambda) \leqslant 0, \ i = 1,2, \ K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) > 0, \tag{81}$$

$$\Lambda_1 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 > f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{82}$$

$$\Lambda_2 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 \leqslant f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{83}$$

$$\Lambda_3 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 > f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{84}$$

$$\Lambda_4 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 > f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{85}$$

$$\Lambda_5 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 > f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 \leqslant f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{86}$$

$$\Lambda_6 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 > f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 \leqslant f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}, \tag{87}$$

$$\Lambda_7 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi, K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda), K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda), K_3 > f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}. \tag{88}$$

Здесь K_i, $i = 1, 2, 3$, – постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\pi^{-1} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_5} [K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda)] d\lambda = P_1,$$

$$\pi^{-1} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_5 \cup \Lambda_7} [K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda)] d\lambda = P_2,$$

$$\pi^{-1} \int\limits_{\Lambda_1 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_7} [K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)] d\lambda = P_3. \tag{89}$$

Матрица спектральных плотностей экстремального векторного входного сигнала $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = [f_{\xi_i\xi_j}(\lambda)]_{i,j=1,2,3}$ дается следующими равенствами:

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & -f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & -f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ -f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & -f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ -f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & -f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_1, \tag{90}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & -f_{\zeta_1\zeta_2}(\lambda) & 0 \\ -f_{\zeta_2\zeta_1}(\lambda) & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_2, \tag{91}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & 0 & -f_{\zeta_1\zeta_3}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 \\ -f_{\zeta_3\zeta_1}(\lambda) & 0 & K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_3, \tag{92}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & -f_{\zeta_2\zeta_3}(\lambda) \\ 0 & -f_{\zeta_3\zeta_2}(\lambda) & K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_4, \tag{93}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} K_1 - f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_5, \tag{94}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 - f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_6, \tag{95}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 - f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda) \end{bmatrix}, \text{ если } \lambda \in \Lambda_7, \tag{96}$$

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\xi}}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ если}$$

$$\lambda \in \Lambda_8 = \{\lambda : 0 \leqslant \lambda \leqslant \pi,\ K_1 \leqslant f_{\zeta_1\zeta_1}(\lambda),\ K_2 \leqslant f_{\zeta_2\zeta_2}(\lambda),\ K_3 \leqslant f_{\zeta_3\zeta_3}(\lambda)\}. \tag{97}$$

Всюду выше рассматривается случай дискретного времени. Если время непрерывно, то теоремы 1 и 2 остаются в силе после замены $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$ на $0 \leqslant \lambda < \infty$.

§ 5. Векторный канал с фильтром

Здесь полученные выше результаты распространяются на канал с фильтром.

Вместо гауссовского векторного канала (1) рассмотрим гауссовский векторный канал

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t), \tag{98}$$

где $\boldsymbol{A}$ обозначает линейный фильтр, который имеет спектральную плотность $[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}$ и фильтрует векторный входной сигнал $\boldsymbol{\xi}(t)$. Как и ранее процесс $\boldsymbol{\zeta}(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, является гауссовским, не зависящим от $\boldsymbol{\xi}(t)$ векторным аддитивным шумом, который является стационарным процессом с n коррелированными компонентами, нулевым средним (т.е. $\mathbf{E}\,\boldsymbol{\zeta}(t) = [\mathbf{E}\,\zeta_1(t), \dots, \mathbf{E}\,\zeta_n(t)]' = [0, \dots, 0]'$) и заданной матрицей спектральных плотностей $[f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)]_{i,j=1,\dots,n}$.

Будем считать, что при всех λ

$$0 < \det[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}. \tag{99}$$

Обозначим через $\boldsymbol{A}^{-1}$ фильтр, обратный фильтру $\boldsymbol{A}$. Пусть $\left[A_{jk}^{(-1)}(\lambda)\right]_{j,k=1,\dots,n}$ – спектральная характеристика фильтра $\boldsymbol{A}^{-1}$. Согласно определению обратного фильтра $([A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}) \left(\left[A_{jk}^{(-1)}(\lambda)\right]_{j,k=1,\dots,n}\right) = \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ – единичная $(n \times n)$-матрица. Фильтр $\boldsymbol{A}^{-1}$ такой, что

$$A_{jk}^{(-1)}(\lambda) = \frac{A_{kj}^{\text{co}}(\lambda)}{\det[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}}, \quad j, k = 1, \dots, n, \tag{100}$$

где A_{kj}^{co} – кофактор элемента $A_{jk}(\lambda)$ в определителе $\det[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}$, т.е.

$$A_{jk}^{\text{co}}(\lambda) = (-1)^{j+k}\widetilde{A}_{jk}(\lambda), \tag{101}$$

где $\widetilde{A}_{jk}(\lambda)$ – минор элемента $A_{jk}(\lambda)$ в определителе $\det[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}$, а минор $\widetilde{A}_{jk}(\lambda)$ – определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из $\det[A_{jk}(\lambda)]_{j,k=1,\dots,n}$ путем удаления j-й строки и k-го столбца.

Теперь вместо гауссовского векторного канала (98) рассмотрим гауссовский векторный канал

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \overline{\boldsymbol{\zeta}}(t), \tag{102}$$

где векторный входной сигнал $\boldsymbol{\xi}(t)$ и гауссовский векторный шум $\overline{\boldsymbol{\zeta}}(t) \triangleq \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\zeta}(t)$ независимы. Гауссовский векторный процесс $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\zeta}(t)$ имеет матрицу спектральных плотностей

$$\left(\left[A_{jk}^{(-1)}(\lambda)\right]_{j,k=1,\dots,n}\right)([f_{\zeta_i\zeta_j}(\lambda)]_{i,j=1,\dots,n})\left(\left[A_{jk}^{(-1)}(\lambda)\right]'_{j,k=1,\dots,n}\right), \tag{103}$$

и предполагается, что определитель этой матрицы не равен нулю.

Известно, что гауссовский векторный канал (102) без фильтра и с мощностным ограничением (2) обладает той же пропускной способностью, что и векторный канал (98) с фильтром и с мощностным ограничением (2). Таким образом, так как векторный канал (102) без фильтра является частным случаем векторного канала (1), теорема 2 дает нижнюю границу для пропускной способности векторного канала (98) с мощностным ограничением (2), если матрица спектральных плотностей шума в теореме 2 задается в виде (103). Подобно случаю 1 (см. § 3), если положить $P_i = 0$ для некоторых i (например, для некоторых $n - l$ входных сигналов) и не максимизировать по этим P_i в (6), то получим нижнюю границу для пропускной способности векторного $(l \times n)$-канала, имеющего l входных сигналов, n выходных сигналов, фильтр и шум $\overline{\zeta}(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brandenburg L.H., Wyner A.D.* Capacity of the Gaussian Channel with Memory: The Multivariate Case // The Bell System Techn. J. 1974. V. 53. № 5. P. 745–778.
2. *Shannon C.E.* Communication in the Presence of Noise // Proc. IRE. 1949. V. 37. № 1. P. 10–21.
3. *Pinsker M.S.* Information and Information Stability of Random Variables and Processes. San Francisco: Holden-Day, 1964.
4. *Пинскер М.С.* Основные понятия теории информации: Дис. ... д-ра физ.-мат.н. М.: Институт проблем передачи информации, 1963.

Цыбаков Борис Соломонович
Институт проблем передачи информации РАН
Куалком, Сан Диего, США
Калифорнийский университет, Сан Диего, США
btsybakov@yahoo.com

Поступила в редакцию
20.10.2005
После переработки
28.03.2006